UNIVERSITÄT MANNHEIM
Institut für Mathematik
<u>*Prof. Dr. H.-J. Bartels*</u>

Übungen zur Funktionentheorie, FS 2012

Blatt 9

Aufgabe 1: Es seien C eine geschlossene stückweise glatte Kurve in der komplexen Zahlenebene und a,b komplexe Zahlen, die nicht auf C liegen.Man zeige: Sind a und b durch einen Weg verbindbar, der C nicht trifft, dann gilt: $\chi\,(C;a) = \chi\,(C;b)$.

Aufgabe 2: G sei Elementargebiet und f eine auf G definierte meromorphe Funktion mit paarweise verschiedenen Null- bzw. Polstellen $a_1,\ldots,a_n \in G \quad (n \in N_0)$. Weiter sei g auf G holomorph und C eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in $G \setminus \{a_1,..a_n\}$ .Man zeige:

$$\frac{1}{2\pi\, i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} g(z)d\,z = \sum_{j=1}^{n} \chi\,(C;a_j)\; ord(f;a_j) g(a_j)\,.$$

Aufgabe 3: Für die folgenden Funktionen bestimme man jeweils in allen ihren Singularitäten die Residuen:

a) $\dfrac{1-\cos(z)}{z^2}$ b) $\dfrac{\exp(z)}{(z-1)^2}$ c) $\dfrac{1}{\sin(\pi\, z)}$.

Aufgabe 4: Man zeige: Das Residuum einer analytischen Funktion f in einer Singularität a ist die eindeutig bestimmte komplexe Zahl c, so daß die Funktion $f(z) - \dfrac{c}{z-a}$ in einer geeigneten punktierten Umgebung von a eine Stammfunktion besitzt.

Abgabetermin: Donnerstag, d.3.5.12 10.00 Uhr.