UNIVERSITÄT MANNHEIM
Institut für Mathematik
Prof. Dr. H.-J. Bartels

Übungen zur Funktionentheorie, FS 2012

Blatt 8

Aufgabe 1: Man bestimme alle Paare (f,g) ganzer Funktionen mit der Eigenschaft $f^2 + g^2 = 1$.
Anleitung: Man zeige, daß eine ganze Funktion h existiert, so daß f = cos ∘ h ,g = sin ∘ h.

Aufgabe 2: Man entwickle die Funktion f(z) = $\frac{z}{z^2+1}$ in $\Re := \{z \mid 0 < |z-i| < 2\}$ in eine Laurentreihe.
Welcher Typ von Singularität liegt bei a = i vor ?

Aufgabe 3: Widerspricht die folgende "Identität" dem Satz von der Eindeutigkeit der Laurententwicklung:

$$0 = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} z^n \quad ?$$

Aufgabe 4: Welche Art der Singularität der Funktion f liegt im Punkt a vor:

(i) f(z) = $\frac{z^3+3z-2i}{z^2+1}$, a = i , .

(ii) f(z) = $\frac{z}{e^z-1}$, $a = 2\pi\, ik$, k ganzzahlig ?

Abgabetermin: Donnerstag, d.26.4.12 10.00 Uhr.