UNIVERSITÄT MANNHEIM
Institut für Mathematik
Prof. Dr. H.-J. Bartels

Übungen zur Funktionentheorie, FS 2012

Blatt 5

Aufgabe 1: Welche der folgenden Funktionen hat auf dem jeweiligen Definitionsbereich eine Stammfunktion? (C bezeichne hierbei die Menge der komplexen Zahlen).
(i) f: C $\to$ C , $z \mapsto \bar{z}$; (ii) g: C $\to$ C , $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$; (iii) h: C \ {0} $\to$ C,
$z \mapsto \cos z \cdot \exp(i \sin z)$.

Aufgabe 2: Welche der folgenden Teilmengen von C sind Gebiete in C ?
(i) $\Re$ *(die reelle Zahlengerade in C);* (ii) $\{z \in C : |\exp(z)| > 1\}$;
(iii) $\{z \in C: |z^2 - 1| < 3\}$; (iv) $\{z \in C : |z^2 - 3| < 1\}$.

Aufgabe 3:. Für von 0 verschiedene komplexe Zahlen a_n bezeichne R den Konvergenzradius der Potenzreihe

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Man zeige: $\liminf \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leq R \leq \limsup \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Aufgabe 4: Man wende den Cauchy'schen Integralsatz auf das Rechteck mit den Ecken a, -a, a+ib, -a+ib (a,b>0) und die Funktion f(z) = $\exp(-z^2)$ an . Man zeige, daß bei festem b die Integrale über die vertikalen Seiten des Rechtecks für a $\to \infty$ gegen 0 konvergieren. Hieraus folgere man dann,

daß $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx)\, dx = \sqrt{\pi}\, e^{-b^2}$.

Hinweis man benutze ohne Beweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$.

Abgabetermin: Donnerstag, d.22.3.12 10.00 Uhr.