UNIVERSITÄT MANNHEIM
Institut für Mathematik
Prof. Dr. H.-J. Bartels

Übungen zur Funktionentheorie, FS 2012

Blatt 3

Aufgabe 1: Es seien $D \subseteq C$ offen , $z_0 \in D$ und $f : D \to C$ sei in z_0 komplex differenzierbar. Weiter seien $D^* := \{ z \in C : \bar{z} \in D \}$ und $g: D^* \to C$, $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$. Zeigen Sie, daß g in $\overline{z_0}$ komplex differenzierbar ist und berechnen Sie $g'(\bar{z}_0)$.

Aufgabe 2: $D \subseteq C$ sei ein Gebiet, d.h. offen und zusammenhängend. $F : D \to C$ sei holomorph auf D und es gelte $f'(z) = 0$ für alle z in D. Zeige: Dann ist f konstant auf D.

Aufgabe 3: Die Funktion $f : G \to C$ sei holomorph auf G. Zeigen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen die folgenden Aussagen äquivalent sind :

(i) f ist konstant auf G ;

(ii) $|f|$ ist konstant auf G ;

(iii) $\bar{f}$ ist holomorph auf G.

Aufgabe 4: Es sei u: $R^2 \to R$ eine harmonische Funktion, d.h. u ist zweimal stetig differenzierbar und es gilt $\Delta\, u(x,y) := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = 0$ für beliebige $(x,y) \in R^2$.

Man zeige: a) Es existiert eine harmonische Funktion v : $R^2 \to R$, so daß die Funktion $f: C \to C$, $x + i\,y \mapsto u(x,y) + i\,v(x,y)$ holomorph ist.

b) v ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Anleitung: Man verwende den Ansatz: $v(x,y) := \int_0^y \frac{\partial}{\partial x} u(0,t)dt - \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} u(t,y)dt$.

Abgabetermin: Donnerstag, d.8.3.12 10.00 Uhr.