Universität Mannheim
Fakultät für Mathematik und Informatik
Finanzmathematik II / HWS 2014

Zusatzaufgaben

1. Definieren Sie die folgenden Begriffe:
   (a) Filtration
   (b) selbstfinanzierende Handelsstrategie (zeitdiskret und zeitstetig)
   (c) zulässige Handelsstrategie
   (d) Martingal
   (e) erreichbarer Contingent-Claim
   (f) vollständiges Finanzmarkt-Modell
   (g) Brownsche Bewegung
   (h) Stoppzeit
   (i) Itô-Prozess

2. Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Welcher der folgenden Prozesse ist wiederum eine Brownsche Bewegung?
   (a) $(-W_t)_{t\geq 0}$
   (b) $\left(\sqrt{t}W_1\right)_{t\geq 0}$
   (c) $(W_{2t} - W_t)_{t\geq 0}$

3. Sei W eine Brownsche Bewegung und $t_i = i\frac{T}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $T > 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2 - T\right)^2\right] = 0$$

4. Seien $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Y_n] = 1$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ die von $Y_1, \ldots, Y_n$ erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie: $M_n = \prod_{k=1}^n Y_k$ ist ein $\mathcal{F}_n$-Martingal.

5. Gegeben sei ein Derivat $\mathcal{X}$, das zum Zeitpunkt $T = 2$ folgende Zahlungsmodalitäten aufweist:

$$\mathcal{X} = \begin{cases} 120, & \text{falls } S_T \leq 120 \\ S_T, & \text{falls } 120 < S_t < 140 \\ 140, & \text{falls } S_T \geq 140 \end{cases}$$

   Für den Aktienpreis S_0 in $t = 0$ gelte $S_0 = 100$. Berechnen Sie den Wert von $\mathcal{X}$ zur Zeit $t = 0$ in folgenden Marktmodellen:

(a) Cox-Ross-Rubinstein-Modell (zwei Perioden) mit $u = 1{,}2$ und $d = 0{,}9$ sowie $r = 0$.

(b) Black-Scholes-Modell mit $\mu = 0{,}2$ und $\sigma = 0{,}1$ sowie $r = 0{,}05$.

6. Gegeben seien eine europäische Put- und eine europäische Call-Option auf eine Aktie S, die keine Dividenden zahlt. Sie wissen Folgendes:

   - Der heutige Aktienpreis ist 60.
   - Der Preis der Call-Option ist um 0,15 höher als der Preis der Put-Option.
   - Beide Optionen haben eine Restlaufzeit von 4 Jahren.
   - Der Ausübungspreis beider Optionen ist 70.

   Berechnen Sie die exponentielle Zinsrate r.

7. Sie und Ihre drei Freunde John, Peter und Mary erhalten folgendes Angebot für europäische Optionen auf dieselbe Aktie mit derselben Restlaufzeit:

Ausübungspreis	Preis Call	Preis Put
40 €	11 €	3 €
50 €	6 €	8 €
55 €	3 €	11 €

   Nachdem Sie zusammen die Informationen überprüft haben, behauptet John, dass sich aus den gegebenen Optionspreisen keine Arbitragemöglichkeiten ergeben.

   Mary hingegen behauptet, dass folgendes Portfolio Arbitrage ermöglicht: Long eine Call-Option mit Ausübungspreis 40, short drei Call-Optionen mit Ausübungspreis 50, Kreditaufnahme in Höhe von 1 sowie long eine gewisse Anzahl Calls mit Ausübungspreis 55.

   Peter ist ebenfalls nicht einverstanden und reklamiert folgende Arbitrage-Strategie: Long zwei Calls und short zwei Puts mit Ausübungspreis 55, long ein Call und ein Put mit Ausübungspreis 40, Kreditaufnahme in Höhe von 2 sowie short einige Calls und long die gleiche Anzahl Puts, jeweils mit Ausübungspreis 50.

   Welche dieser Aussagen ist korrekt?

   (a) Nur John hat Recht.
   (b) Nur Mary hat Recht.
   (c) Nur Peter hat Recht.
   (d) Mary und Peter haben beide Recht.
   (e) Niemand hat Recht.

8. Ein Versicherungsunternehmen verkauft folgendes an den Aktienindex S gebundenes Produkt: Der Kunde zahlt zunächst eine Einmalprämie in Höhe von β, von der $y\,\%$ zunächst an das Unternehmen gehen. Der Kunde erhält dafür eine garantierte

Mindestverzinsung von $g\,\%$ auf den Rest seines Investments. Die Auszahlung G zum Vertragsende T ergibt sich somit zu:

$$G = \beta \cdot (1 - y\,\%) \cdot \max\left(\frac{S_T}{S_0},\ (1 + g\,\%)^T\right)$$

Sie erhalten folgende Informationen:

- Die Laufzeit des Vertrags beträgt 1 Jahr.
- Die garantierte Mindestverzinsung $g\,\%$ beträgt $3\,\%$.
- Es werden keine Dividenden gezahlt.
- $S_0 = 100$.
- Der Preis einer einjährigen europäischen Put-Option auf den Index mit Ausübungspreis 103 kostet 15,21.

Ermitteln Sie $y\,\%$ derart, dass kein Risiko beim Versicherungsunternehmen verbleibt.

9. Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie dass der Prozess Y, definiert durch $Y_t = t^2 W_t^3, t \geq 0$ die folgende stochastische Differentialgleichung erfüllt:

$$\mathrm{d}Y_t = \left(2Y_t/t + 3\left(t^4 Y_t\right)^{1/3}\right)\mathrm{d}t + 3\left(tY_t\right)^{2/3}\mathrm{d}W_t$$

10. Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Prozesse $Z^{(1)}$ und $Z^{(2)}$, definiert durch

$$Z_t^{(1)} = \cos(aW_t) \quad \text{und} \quad Z_t^{(2)} = \sin(aW_t), \quad t \geq 0$$

das folgende System von stochastischen Differentialgleichungen erfüllen:

$$\begin{cases} Z_t^{(1)} = 1 - \frac{a^2}{2}\int_0^t Z_s^{(1)}\,\mathrm{d}s - a\int_0^t Z_s^{(2)}\,\mathrm{d}W_s, \\ Z_t^{(2)} = -\frac{a^2}{2}\int_0^t Z_s^{(2)}\,\mathrm{d}s - a\int_0^t Z_s^{(1)}\,\mathrm{d}W_s \end{cases} \quad t \geq 0$$

11. Berechnen Sie die Varianz des Itô-Integrals $\int_0^T W_t\,\mathrm{d}W_t$. (Hinweis 1: Wenden Sie die Itô-Formel auf W_t^2 an. Hinweis 2: $\mathbb{E}\left[W_t^4\right] = 3t^2$)

12. Beweisen Sie, dass sich der Wertprozess $V(t, S_t) = aS_t + be^{rt}$ im Black-Scholes-Modell durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie realisieren lässt (unabhängig von den Konstanten a, b).

13. Finden Sie eine alternative Darstellung für das stochastische Integral

$$\int_0^T W_t^{1/2}\,\mathrm{d}W_t,$$

die keine stochastischen Integrale beinhaltet. (Hinweis: Wenden Sie die Itô-Formel auf $W_t^{3/2}$ an)

14. Betrachten Sie eine europäische Call-Option, deren Strike-Preis dem aktuellen Aktienpreis entspricht.

    (a) Angenommen, die Volatilität ist gleich null. Erläutern Sie eine Möglichkeit, um unter den üblichen Voraussetzungen den Wert der Option zu ermitteln, ohne die Black-Scholes-Formel oder -PDE anzuwenden. (Hinweis: In Ihrem Ergebnis sollte die Drift μ nicht auftauchen.)

    (b) Zeigen Sie, dass der in (a) ermittelte Wert für $\sigma = 0$ die Black-Scholes-PDE erfüllt.

    (c) Zuletzt weisen Sie nach, dass der Wert der Black-Scholes-Formel für $\sigma \to 0$ ebenfalls gegen den ermittelten Wert konvergiert.

15. Das Statonovich-Integral $\int_0^t X_s \circ \mathrm{d}Y_s$ für bestimmte Prozesse X, Y sei definiert durch

    $$\int_0^t X_s \circ \mathrm{d}Y_s := \int_0^t X_s \,\mathrm{d}Y_s + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}[X,Y]_t$$

    wobei $[X,Y]_t$ die Kreuz-Variation von X und Y beschreibe. Angenommen, die Brownsche Bewegung W_t erfüllt die Anforderungen an X und Y. Zeigen Sie:

    $$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s) \circ \mathrm{d}W_s$$

    Sie dürfen annehmen, dass f dreimal stetig differenzierbar ist. (Hinweis: Finden Sie eine Darstellung von $f'(W_t)$ als Itô-Prozess, um die Kreuz-Variation zu berechnen.)

16. Sei $X_t := at + \sigma W_t, t \geq 0, a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. Zeigen Sie, dass $Y_t := e^{X_t}$ eine geometrische Brownsche Bewegung ist. Anschließend zeigen Sie, dass auch $Z_t = 1/Y_t$ eine geometrische Brownsche Bewegung ist.

Viele weitere Übungsaufgaben (inklusive Lösungen), die teilweise(!) gut zur Vorlesung passen, sind unter folgendem Link zu finden:
Übungsaufgaben