Universität Mannheim
Fakultät für Mathematik und Informatik
Finanzmathematik II / HWS 2014
Prof. Dr. H.-J. Bartels

Übungsblatt 9

1. Sei W_t standardisierte Brownsche Bewegung. Berechnen Sie das stochastische Integral
$$\int_0^T W_t\, dW_t$$
durch die Approximation mittels folgenden stochastischen Treppenprozesses:
$$\Delta_n(t) = \begin{cases} W(0) = 0 & \text{für } 0 \le t < \frac{T}{n}, \\ W\left(\frac{T}{n}\right) & \text{für } \frac{T}{n} \le t < \frac{2T}{n}, \\ \vdots & \\ W\left(\frac{(n-1)T}{n}\right) & \text{für } \frac{(n-1)T}{n} \le t < T. \end{cases}$$
Hinweis: Setzen Sie
$$\begin{aligned} \int_0^T W_t dW_t &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \Delta_n(t) dW_t \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} W\left(\frac{jT}{n}\right)\left[W\left(\frac{(j+1)T}{n}\right) - W\left(\frac{jT}{n}\right)\right] \end{aligned}$$
und führen Sie den Grenzübergang durch. Die Ergebnisse der Aufgabe 4 vom letzen Übungsblatt können dabei hilfreich sein.

2. Der Prozess X_t genüge der stochastischen Differentialgleichung
$$dX_t = X_t(\mu(t)\, dt + \sigma(t)\, dW_t)$$
mit $X_0 > 0$ und $\mu, \sigma \in C^0[0, T]$. Zeigen Sie, dass für
$$Y_t := X_t \exp\left(-\int_0^t \mu(s)\, ds\right)$$
gilt
$$dY_t = Y_t \sigma(t)\, dW_t.$$

3. Sei W_t standardisierte Brownsche Bewegung. Berechnen Sie das stochastische Differential dW_t^n.

4. Unter Verwendung von Aufgabe 3 zeigen Sie, dass für reelle Polynome Q gilt

$$dQ(W_t) = Q'(W_t)\, dW_t + \frac{1}{2} Q''(W_t)\, dt.$$

Abgabe bis Montag, den 10. November um 10:00 Uhr in A5