Universität Mannheim
Fakultät für Mathematik und Informatik
Finanzmathematik II / HWS 2014
Prof. Dr. H.-J. Bartels

Übungsblatt 8

1. Sei W_t standardisierte Brownsche Bewegung und $t_0 \geq 0$ eine Konstante. Beweisen Sie, dass
$$\widetilde{W}_t := W_{t+t_0} - W_{t_0} \quad \text{für} \quad t \geq 0$$
auch standardisierte Brownsche Bewegung ist.

2. Beweisen Sie: Sind s und t Stoppzeiten, so ist auch
$$s \wedge t := \min\{s, t\}$$
eine Stoppzeit.

3. Zeigen Sie, dass jede Funktion auf der positiven reellen Gerade mit endlicher Variation als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen dargestellt werden kann.

4. Sei $(W_t)_{t \geq 0}$ standardisierte Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass für die quadratische Variation der Brownschen Bewegung $[W, W](T)$, $T \geq 0$ gilt
$$[W, W](T) = T \quad \text{in} \quad L^2(P).$$
Hinweis:
Sei $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} \|Z\| = 0$. Dabei ist $\|Z\|$ wie folgt definiert
$$\|Z\| = \max_{j=0,\ldots,n-1} (t_{j+1} - t_j).$$
Weiter sei
$$Q_Z := \sum_{j=0}^{n-1} \left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^2.$$
Berechnen Sie zunächst $\mathbb{E}[Q_Z]$, $\operatorname{var}[Q_Z]$ und führen Sie anschließend den Grenzübergang durch.

Abgabe bis Montag, den 03. November um 10:00 Uhr in A5