

Übungsblatt 6

Universität Mannheim
Fakultät für Mathematik und Informatik
Finanzmathematik II / HWS 2014
Prof. Dr. H.-J. Bartels

1. Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 . Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion von X , d.h. die Funktion

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E} [e^{uX}].$$

Hinweis: Dichtefunktion von X ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

2. Für eine normalverteilte Zufallsvariable $X \sim N(0, \sigma^2)$ mit Mittelwert 0 und Varianz σ^2 zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgende Identitäten

$$\mathbb{E} [X^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sigma^{2n}, \quad \mathbb{E} [X^{2n+1}] = 0.$$

3. Betrachten Sie ein N -periodiges Cox-Ross-Rubinstein-Modell. In diesem Finanzmarkt-Modell gibt es zwei Anlageklassen

$$S_n := (S_n^0, S_n^1)_{n=0, \dots, N}.$$

Dabei entwickeln diese sich wie folgt:

$$S_n^0 = (1+r)^n \quad \text{für } n = 0, \dots, N$$

und

$$S_n^1 = \begin{cases} uS_{n-1}^1 & \text{mit } p > 0 \\ dS_{n-1}^1 & \text{mit } 1-p > 0 \end{cases} \quad \text{für } n = 1, \dots, N, \quad S_0^1 = S > 0$$

mit $d < 1+r < u$. Geben Sie die Handelsstrategie $\phi_n := (\phi_n^0, \phi_n^1)_{n=0, \dots, N}$ an, die den Wert einer Call-Option zur Zeit N mit Basispreis K dupliziert.

4. Sei $(M_t)_{t \geq 0}$ ein Martingal mit $\mathbb{E} [M_t^2] < \infty$ für alle t . Zeigen Sie

$$\mathbb{E} [(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E} [M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s] \quad \text{für alle } s \leq t.$$

Abgabe bis Montag, den 20. Oktober um 10:00 Uhr in A5