Übungsblatt 12

Universität Mannheim
Fakultät für Mathematik und Informatik
Finanzmathematik II / HWS 2014
Prof. Dr. H.-J. Bartels

1. Berechnen Sie eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = -cX_t\,dt + \sigma\,dW_t, \quad X_0 = x.$$

(*Hinweis: Wenden Sie auf* $X_t e^{ct}$ *die Produktregel an.*)

2. Es seien zwei stochastische Differentialgleichungen gegeben

$$dX_t = \alpha X_t\,dt + \sigma X_t\,dW_t,$$
$$dY_t = \gamma Y_t\,dt + \delta Y_t\,dW_t.$$

Die stochastischen Prozesse X und Y seien Lösungen von diesen Gleichungen, wobei sowohl X als auch Y von derselben standardisierten Brownschen Bewegung W_t getrieben werden. Weiter sei der Prozess Z durch

$$Z := \frac{X}{Y}$$

definiert. Leiten Sie eine stochastische Differentialgleichung für Z her. Falls möglich eliminieren Sie dabei X und Y und geben Sie die Antwort nur in Termen von Z.

3. Bei einer aktienindexgebundenen Lebensversicherung werde ein feste Prozentsatz $i(p)$ der jährlichen Steigerung eines Index durch Cliquet-Optionen abgesichert. Wenn $S(t)$ den Verlauf des betreffenden Index beschreibt, so beträgt die Gewinnbeteiligung für den Kunden bei Ablauf T des Vertrages

$$G = i(p) \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1 \right)^{+}.$$

Es wird vorausgesetzt, dass $S(t)$ einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt:

$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t), \quad 0 \le t \le T.$$

Der Zins sei wie in dem Black-Scholes-Modell konstant deterministisch mit exponentieller Zinsrate r. Der aktuelle Wert der Gewinnbeteiligung G zur Zeit $t = 0$ unter dem äquivalenten Martingalmass Q berechnet sich dann zu $e^{-rT}\mathbb{E}^*[G]$. Berechnen Sie mit Hilfe der Black-Scholes-Formel $\mathbb{E}^*[G]$.

(*Hinweis:* Beachten Sie, dass nach Übergang zu dem neuen Mass Q $S(t)$ der folgenden stochastischen Differentialgleichung genügt:

$$dS(t) = rS(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW^*(t), \quad 0 \le t \le T$$

mit einer Q-Brownschen Bewegung W^*. Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$S(t) = S(0)\exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W^*(t)\right).$$

Damit berechnen Sie die Quotienten $\frac{S(t)}{S(t-1)}$.)

4. In einem Black-Sholes-Modell bestimmen Sie den Preis eines Kontraktes $\mathcal{X}$, der zum Zeitpunkt T folgende Zahlungsmodalitäten aufweist:

$$\mathcal{X} = \begin{cases} K & \text{falls } S(T) \leq A \\ K + A - S(T) & \text{falls } A < S(T) < K + A \\ 0 & \text{falls } S(T) > K + A \end{cases}$$

(*Hinweis:* Duplizieren Sie diesen Kontrakt durch ein Portfolio bestehend aus Aktien, Zero-Bonds und europäischen Optionen.)

Abgabe bis Montag, den 1. Dezember um 10:00 Uhr in A5