Übung zur Finanzmathematik II

Denis Boldin, Patrick Schlarmann

Universität Mannheim

Mannheim, Herbstsemester 2014

Aufgabe 1. Berechnen Sie eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = -cX_t\,dt + \sigma\,dW_t, \quad X_0 = x.$$

(*Hinweis: Wenden Sie auf* $X_t e^{ct}$ *die Produktregel an.*)

Beweis.

Nach Itô-Produkt-Formel gilt

$$X_t e^{ct} = X_0 + \int_0^t e^{cs}\,dX_s + \int_0^t X_s\,d\left(e^{cs}\right) + \underbrace{dX_t d\left(e^{ct}\right)}_{=0}$$

Beachte: Falls g stetig differenzierbar ist, gilt:

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_0^t f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Somit:

$$\begin{aligned} X_t e^{ct} &= X_0 + \int_0^t e^{cs}\, dX_s + \int_0^t X_s\, d\left(e^{cs}\right) \\ &= X_0 + \int_0^t -ce^{cs} X_s\, ds + \int_0^t \sigma e^{cs}\, dW_s + \int_0^t ce^{cs} X_s\, ds \\ &= X_0 + \int_0^t \sigma e^{cs}\, dW_s \end{aligned}$$

Und folglich

$$X_t = e^{-ct}\left(x + \int_0^t \sigma e^{cs}\, dW_s\right). \quad \square$$

Aufgabe 2. Es seien zwei stochastische Differentialgleichungen gegeben

$$dX_t = \alpha X_t\,dt + \sigma X_t\,dW_t,$$
$$dY_t = \gamma Y_t\,dt + \delta Y_t\,dW_t.$$

Die stochastischen Prozesse X und Y seien Lösungen von diesen Gleichungen, wobei sowohl X als auch Y von derselben standardisierten Brownschen Bewegung W_t getrieben werden. Weiter sei der Prozess Z durch

$$Z := \frac{X}{Y}$$

definiert. Leiten Sie eine stochastische Differentialgleichung für Z her. Falls möglich eliminieren Sie dabei X und Y und geben Sie die Antwort nur in Termen von Z.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
dX_t &= \alpha X_t\,dt + \sigma X_t\,dW_t,\\
dY_t &= \gamma Y_t\,dt + \delta Y_t\,dW_t.
\end{aligned}
$$

Wir berechnen zunächst $d\left(\frac{1}{Y_t}\right)$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
d\left(\frac{1}{Y_t}\right) &= -\frac{1}{Y_t^2}\,dY_t + \frac{1}{2}\frac{2}{Y_t^3}\,dY_t dY_t\\
&= -\gamma\frac{1}{Y_t}\,dt - \delta\frac{1}{Y_t}\,dW_t + \delta^2\frac{1}{Y_t}\,dt.
\end{aligned}
$$

Somit folgt

$$
\begin{aligned}
dZ_t &= d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) = \frac{1}{Y_t}\,dX_t + X_t d\left(\frac{1}{Y_t}\right) + dX_t d\left(\frac{1}{Y_t}\right)\\
&= \alpha Z_t\,dt + \sigma Z_t\,dW_t - \gamma Z_t\,dt - \delta Z_t\,dW_t + \delta^2 Z_t\,dt - \sigma\delta Z_t\,dt\\
&= \left(\alpha - \gamma - \sigma\delta + \delta^2\right) Z_t\,dt + (\sigma - \delta)\,Z_t\,dW_t.
\end{aligned}
$$

$\square$

Aufgabe 3. siehe Übungsblatt.

Beweis.

Aus

$$S(t) = S(0) \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W^*(t)\right)$$

folgt

$$\begin{aligned}\frac{S(t)}{S(t-1)} &= 1 \cdot \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot 1 + \sigma\left(W^*(t) - W^*(t-1)\right)\right) \\ &\stackrel{D}{=} 1 \cdot \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot 1 + \sigma W^*(1)\right) := \widetilde{S}(1), \quad \widetilde{S}(0) = 1.\end{aligned}$$

Somit folgt weiter

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*[G] &= i(p)\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}^*\left[\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}-1\right)^+\right]\\ &= i(p)\sum_{t=1}^{T}e^r e^{-r}\mathbb{E}^*\left[\left(\widetilde{S}(1)-1\right)^+\right] = i(p)\sum_{t=1}^{T}e^r C(1,1,1),\end{aligned}$$

wobei $C(T,S,K)$ den Preis einer Call-Option auf das Basispapier S mit der Laufzeit T und dem Basispreis K bezeichnet. $\square$

Aufgabe 4. In einem Black-Scholes-Modell bestimmen Sie den Preis eines Kontraktes $\mathcal{X}$, der zum Zeitpunkt T folgende Zahlungsmodalitäten aufweist:

$$\mathcal{X} = \begin{cases} K & \text{falls } S(T) \leq A \\ K + A - S(T) & \text{falls } A < S(T) < K + A \\ 0 & \text{falls } S(T) > K + A \end{cases}$$

(*Hinweis:* Duplizieren Sie diesen Kontrakt durch ein Portfolio bestehend aus Aktien, Zero-Bonds und europäischen Optionen.)

Beweis.

Das Ausübungsprofil des Kontraktes $\mathcal{X}$ ist identisch mit dem Ausübungsprofil des folgenden Portfolios $\mathcal{Y}$:

1 Put long mit dem Basispreis $A + K$ und der Laufzeit T

1 Put short mit dem Basispreis A und der Laufzeit T

$\Longrightarrow$ der Preis des Kontraktes $\mathcal{X}$ gleich dem Preis des Portfolios $\mathcal{Y}$.
(Detaillierte Erklärung an der Tafel)

$\square$

Zusatzaufgaben

Aufgabenstellung so wie in d. Aufgabe 4.

i) Straddle:

$$\mathcal{X} = \begin{cases} K - S(T) & \text{falls } S(T) \leq K \\ S(T) - K & \text{falls } S(T) > K \end{cases}$$

ii) Bull Spread:

$$\mathcal{X} = \begin{cases} A & \text{falls } S(T) \leq A \\ S(T) & \text{falls } A < S(T) < B \\ B & \text{falls } S(T) \geq B \end{cases},$$

wobei $A < B$ ist.