Übung zur Finanzmathematik II

Denis Boldin, Patrick Schlarmann

Universität Mannheim

Mannheim, Herbstsemester 2014

Aufgabe 1. Es seien $(W_t)_{t\geq 0}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung, $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $F'(W_s) = f(W_s)$ mit $F(x) := \int_0^x f(y)\,dy$. Weisen Sie nach, dass gilt

$$\int_a^b f(W_s)\,dW_s = F(W_b) - F(W_a) - \frac{1}{2}\int_a^b f'(W_s)\,ds.$$

Beweis.

Aufgrund der Identität

$$W_t = \int_0^t dW_s$$

ist $(W_t)_{t\geq 0}$ selbst ein Itô-Prozess. Mit der Itô-Formel gilt daher

$$\begin{aligned} dF(W_t) &= F'(W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}F''(W_t)(dW_t)^2 \\ &= f(W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}f'(W_t)\,dt. \end{aligned}$$

Was nichts anderes heißt als

$$\int_a^b f(W_s)\,dW_s = F(W_b) - F(W_a) - \frac{1}{2}\int_a^b f'(W_s)\,ds$$

□

Aufgabe 2. Es sei $X \sim N(0, \sigma^2)$ eine normalverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie mit Hilfe des Itô-Lemmas folgende Identität

$$\mathbb{E}\left[X^{2n}\right] = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sigma^{2n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Wenden Sie auf $(W(t))^{2n}$ das Itô-Lemma an, wobei $W(t)$ eine standardisierte Brownsche Bewegung ist. Anschließend berechnen Sie $\mathbb{E}\left[X^{2n}\right]$ unter Verwendung von $X \overset{D}{=} W(\sigma^2)$.

Beweis.

Nach der Itô-Formel gilt

$$W_t^{2n} = \underbrace{W_0^{2n}}_{=0} + 2n \int_0^t W_s^{2n-1}\, dW_s + \frac{1}{2} 2n\, 2(n-1) \int_0^t W_s^{2n-2} ds.$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}\left[W_t^{2n}\right] = \underbrace{\mathbb{E}\left[2n \int_0^t W_s^{2n-1}\, dW_s\right]}_{=0,\text{ da Martingal}} + \mathbb{E}\left[\frac{1}{2} 2n\,(2n-1) \int_0^t W_s^{2n-2} ds\right].$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[W_t^{2n}\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}2n\,(2n-1)\int_0^t W_s^{2n-2}ds\right] \\
&= \frac{1}{2}2n\,(2n-1)\int_0^t \mathbb{E}\left[W_s^{2n-2}\right]ds \\
{}_{(n-1)-\text{mal}} &\vdots \\
&= \frac{(2n)!}{2^n}\int_0^t\int_0^{s_n}\dots\int_0^{s_2} 1\,ds_1 ds_2\dots ds_n \\
&= \frac{(2n)!}{2^n n!}\,t^n.
\end{aligned}$$

Da $X \overset{D}{=} W_{\sigma^2}$ ist, folgt

$$\mathbb{E}\left[X^{2n}\right] = \mathbb{E}\left[W_{\sigma^2}^{2n}\right] = \frac{(2n)!}{2^n n!}\,\sigma^{2n}.$$

□

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass von Black-Scholes angegebene so genannte „Hedge-Portfolio“ nicht selbstfinanzierend ist.

Aufgabe 4. $V(S,t)$ bezeichne den aktuellen Wert einer selbstfinanzierenden Portfolio-Strategie in dem Black-Scholes Kontext. Können folgende Funktionen $V(S,t)$ realisiert werden?

i) $V(S,t) = S^2$

ii) $V(S,t) = cS$, mit einer Konstanten $c > 0$.

Beschreiben Sie ggf. die entsprechenden Anlagestrategien explizit.

Beweis.

Lösung in:

Yaacov Z. Bergman: A Characterization of Self-Financing Portfolio Strategies

Zusatzaufgaben

Berechnen Sie:

$$\int_0^t B_s dB_s = \ldots ?$$

$$\int_0^t s \, dB_s = \ldots ?$$

$$\int_0^t \sin(B_s) dB_s = \ldots ?$$

Führen Sie folgende Integrale ein:

i) Riemann Integral

$$\int_0^T f(t)\,dt$$

ii) Riemann-Stieltjes Integral

$$\int_0^T f(t)\,dg(t)$$

iii) Wiener-Integral

$$\int_0^T f(s)\,dB_s$$

iv) Itô-Integral

$$\int_0^T f(s,\omega)\,dB_s(\omega)$$