Übung zur Finanzmathematik II

Denis Boldin, Patrick Schlarmann

Universität Mannheim

Mannheim, Herbstsemester 2014

Aufgabe 1.
Sei S_t geometrische Brownsche Bewegung, d.h. es gilt

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t, \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie dS_t^n.

Beweis.

Mit dem Itô-Lemma folgt

$$\begin{aligned} dS_t^n &= nS_t^{n-1} dS_t + \frac{1}{2} n(n-1) S_t^{n-2} [dS_t]^2 \\ &= nS_t^{n-1} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} n(n-1) S_t^{n-2} \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= n\mu S_t^n dt + \frac{1}{2} n(n-1) \sigma^2 S_t^n dt + n\sigma S_t^n dW_t. \end{aligned}$$

Wir setzen $\widetilde{\mu} := n\mu + \frac{1}{2} n(n-1)\sigma^2$ und $\widetilde{\sigma} := n\sigma$, dann folgt

$$dS_t^n = \widetilde{\mu} \, S_t^n dt + \widetilde{\sigma} \, S_t^n dW_t.$$

□

Aufgabe 2.
Sei $W = (W_1, W_2)_t$ eine 2-dimensionale Brownsche Bewegung und X_t ein 2-dimensionaler Ito-Prozess mit

$$dX_t^i = \mu_t^i \, dt + \sigma_t^{i,1} \, dW_t^1 + \sigma_t^{i,2} \, dW_t^2 \quad \text{für} \quad i = 1, 2.$$

Berechnen Sie für $Y_t = X_t^1 X_t^2$ das stochastische Differential dY_t.

Beweis.

Mit Itô-Produkt-Formel gilt

$$dY_t = X_t^1 dX_t^2 + X_t^2 dX_t^1 + dX_t^1 dX_t^2$$

Wir berechnen den dritten Term $dX_t^1 dX_t^2$.

$$
\begin{aligned}
dX_t^1 dX_t^2 &= \left(\mu_t^1\,dt + \sigma_t^{1,1}\,dW_t^1 + \sigma_t^{1,2}\,dW_t^2\right)\left(\mu_t^2\,dt + \sigma_t^{2,1}\,dW_t^1 + \sigma_t^{2,2}\,dW_t^2\right)\\
&= \left(\sigma_t^{1,1}\sigma_t^{2,1} + \sigma_t^{1,2}\sigma_t^{2,2}\right)dt + \left(\sigma_t^{1,1}\sigma_t^{2,2} + \sigma_t^{1,2}\sigma_t^{2,1}\right)dW_t^1 dW_t^2\\
&= \left(\sigma_t^{1,1}\sigma_t^{2,1} + \sigma_t^{1,2}\sigma_t^{2,2}\right)dt.
\end{aligned}
$$

Merkregel:

	dt	dW_t
dt	0	0
dW_t	0	dt

Zu zeigen ist noch, dass $dW_t d\widetilde{W}_t = 0$ ist, wobei $(W_t)_{t\geq 0}, (\widetilde{W}_t)_{t\geq 0}$ unabhängige standardisierte 1-dimensionale Brownsche Bewegungen.

Sei $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[0, T]$. Wir definieren Kreuz-Variation von W und $\widetilde{W}$ durch

$$C_Z := \sum_{i=0}^{n-1} \left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right] \left[\widetilde{W}(t_{i+1}) - \widetilde{W}(t_i)\right]$$

Es ist klar, dass $\mathbb{E}\left[C_Z\right] = 0$ ist. Wir berechnen die Varianz von C_Z. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} C_Z^2 = & \sum_{i=0}^{n-1} \left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right]^2 \left[\widetilde{W}(t_{i+1}) - \widetilde{W}(t_i)\right]^2 \\ & \qquad + 2 \sum_{i<j} \left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right] \left[\widetilde{W}(t_{i+1}) - \widetilde{W}(t_i)\right] \\ & \qquad\qquad \cdot \left[W(t_{j+1}) - W(t_j)\right] \left[\widetilde{W}(t_{j+1}) - \widetilde{W}(t_j)\right]. \end{aligned}$$

Und weiter

$$\operatorname{Var}\left[C_Z\right] = \mathbb{E}\left[C_Z^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right]^2 \left[\widetilde{W}(t_{i+1}) - \widetilde{W}(t_i)\right]^2\right].$$

Da $\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right]^2$ und $\left[\widetilde{W}(t_{i+1}) - \widetilde{W}(t_i)\right]^2$ unabhängig von einander sind, folgt

$$\operatorname{Var}[C_Z] = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 \leq \|Z\| \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = \|Z\| \, T,$$

wobei $\|Z\| = \max_{i=0,\dots,n-1}(t_{i+1} - t_i)$ ist. Weiterhin folgt

$$\lim_{\|Z\| \to 0} \operatorname{Var}[C_Z] = 0.$$

Somit haben wir gezeigt, dass $dW d\widetilde{W} = 0$ ist.

$\square$

Aufgabe 3. Die Zufallsvariable X sei unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P $N(0,1)$-verteilt und $Y = X + m$. Zeigen Sie, dass es ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q gibt, so dass Y unter Q $N(0,1)$-verteilt ist. Geben Sie Q explizit an.

Beweis.

Siehe Folien zum Thema Maßwechsel.

$\square$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die von $\widetilde{W}_t := W_t + ct$, wobei c reelle Konstante und W_t standardisierte Brownsche Bewegung ist, erzeugte Filtrierung in der gegebenen σ-Algebra $\mathcal{F}$ des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraumes mit der von W_t erzeugten übereinstimmt.

Beweis.

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s, s \leq t) := \sigma\Big(\bigcup_{s\in[0,t]} \sigma(W_s)\Big) = \sigma\Big(\bigcup_{s\in[0,t]} \underbrace{\left\{W_s^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(R)\right\}}_{:=\sigma(W_s)}\Big)$$

$$\mathcal{F}_t^{\widetilde{W}} = \sigma(\widetilde{W}_s, s \leq t) := \sigma\Big(\bigcup_{s\in[0,t]} \sigma(\widetilde{W}_s)\Big) = \sigma\Big(\bigcup_{s\in[0,t]} \underbrace{\left\{\widetilde{W}_s^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(R)\right\}}_{:=\sigma(\widetilde{W}_s)}\Big)$$

Zu zeigen ist also $\mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_t^{\widetilde{W}}$. Dazu zeigen wir für jedes $s \in [0,t]$, dass $\sigma(W_s) = \sigma(\widetilde{W}_s)$ gilt. Die letzte Gleichheit wird durch die Gleichheit der Erzeuger gezeigt.

Der Erzeuger von $\sigma(W_s)$ ist z.B. (siehe [1, Satz 1.81])

$$\mathcal{E}^{W_s} := \left\{ W_s^{-1}(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei

$$W_s^{-1}(-\infty, a) := \{\omega \in \Omega \mid W_s(\omega) < a\}.$$

„$\subset$“

Sei nun $A \in \mathcal{E}^{W_s}$, dann existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so dass gilt $A = W_s^{-1}(-\infty, a)$

$$\begin{aligned} A = W_s^{-1}(-\infty, a) &= \{\omega \in \Omega \mid W_s(\omega) < a\} \\ &= \left\{ \omega \in \Omega \mid \widetilde{W}_s(\omega) < a + cs \right\} \\ &= \widetilde{W}_s^{-1}(-\infty, a + cs). \end{aligned}$$

Daraus folgt $A \in \mathcal{E}^{\widetilde{W}_s}$.

„$\supset$“ zeigt man analog.

$\square$

Klenke, A.
Wahrscheinlichkeitstheorie, 2. ed.
Springer, Berlin; Heidelberg [u.a.], 2008.