Übung zur Finanzmathematik II

Denis Boldin, Patrick Schlarmann

Universität Mannheim

Mannheim, Herbstsemester 2014

Aufgabe 1. Sei W_t standardisierte Brownsche Bewegung. Berechnen Sie das stochastische Integral

$$\int_0^T W_t \, dW_t$$

durch die Approximation mittels folgenden stochastischen Treppenprozesses:

$$\Delta_n(t) = \begin{cases} W(0) = 0 & \text{für } 0 \leq t < \frac{T}{n}, \\ W\left(\frac{T}{n}\right) & \text{für } \frac{T}{n} \leq t < \frac{2T}{n}, \\ \vdots & \\ W\left(\frac{(n-1)T}{n}\right) & \text{für } \frac{(n-1)T}{n} \leq t < T. \end{cases}$$

Hinweis: Setzen Sie

$$\begin{aligned} \int_0^T W_t dW_t &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \Delta_n(t) dW_t \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} W\left(\frac{jT}{n}\right) \left[W\left(\frac{(j+1)T}{n}\right) - W\left(\frac{jT}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

und führen Sie den Grenzübergang durch. Die Ergebnisse der Aufgabe 4 vom letzten Übungsblatt können dabei hilfreich sein.

Beweis

$$
\begin{aligned}
\int_0^T W_t dW_t &= \lim_{n\mapsto\infty} \int_0^T \triangle_n(t) dW_t \\
&= \lim_{n\mapsto\infty} \sum_{j=0}^{n-1} W\left(\frac{jT}{n}\right)\left(W\left(\frac{(j+1)T}{n}\right) - W\left(\frac{jT}{n}\right)\right) \\
&= \lim_{n\mapsto\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{1}{2}\left(W^2\left(\frac{(j+1)T}{n}\right) - W^2\left(\frac{jT}{n}\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{2}\left(W\left(\frac{(j+1)T}{n}\right) - W\left(\frac{jT}{n}\right)\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

Beweis Fortsetzung

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \mapsto \infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \left[W^2\left(\frac{(j+1)T}{n}\right) - W^2\left(\frac{jT}{n}\right) \right]}_{\text{Teleskopsumme}}$$

$$- \frac{1}{2} \lim_{n \mapsto \infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \left(W\left(\frac{(j+1)T}{n}\right) - W\left(\frac{jT}{n}\right) \right)^2}_{=T, \quad \text{nach Blatt 8, A4.}}$$

$$= \frac{1}{2} W^2(T) - \frac{1}{2} T.$$

□

Aufgabe 2. Der Prozess X_t genüge der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = X_t(\mu(t)\,dt + \sigma(t)\,dW_t)$$

mit $X_0 > 0$ und $\mu, \sigma \in C^0[0, T]$. Zeigen Sie, dass für

$$Y_t := X_t \exp\left(-\int_0^t \mu(s)\,ds\right)$$

gilt

$$dY_t = Y_t\sigma(t)\,dW_t.$$

Beweis.

Nach der Produktregel für Itô-Prozesse und mit $f(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)\,ds}$ gilt

$$\begin{aligned}
dY_t &= d(X_t f(t)) = X_t\,df(t) + f(t)dX_t + dX_t\,df(t) \\
&= -X_t f(t)\mu(t)\,dt + X(t)f(t)\mu(t)\,dt + X(t)f(t)\sigma(t)\,dW_t + dX_t\,df(t) \\
&= Y(t)\sigma(t)\,dW_t + dX_t\,df(t)
\end{aligned}$$

Beweis Fortsetzung

$$
\begin{aligned}
\ldots &= Y_t \sigma(t)\, dW_t + dX_t\, df(t) \\
&= Y_t \sigma(t)\, dW_t + \left(X_t \mu(t)\, dt + X_t \sigma(t)\, dW_t\right) \left(-f(t)\mu(t) dt\right) \\
&= Y_t \sigma(t)\, dW_t - \underbrace{\left(X_t f(t) \mu^2(t) (dt)^2 + X_t f(t) \sigma(t) \mu(t)\, dW_t\, dt\right)}_{=0,} \\
&= Y_t \sigma(t)\, dW_t.
\end{aligned}
$$

Merkregel:

	dt	dW_t
dt	0	0
dW_t	0	dt

$\square$

Aufgabe 3. Sei W_t standardisierte Brownsche Bewegung. Berechnen Sie das stochastische Differential dW_t^n.

Beweis.

Sei $f(x) = x^n$, dann gilt nach der Itô-Formel

$$\begin{aligned} dW_t^n = df(W_t) &= f'(W_t)\, dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t)\, (dW_t)^2 \\ &= nW_t^{n-1}\, dW_t + \frac{1}{2} n(n-1) W_t^{n-2}\, dt. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4. Unter Verwendung von Aufgabe 3 zeigen Sie, dass für reelle Polynome Q gilt

$$dQ(W_t) = Q'(W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}Q''(W_t)\,dt.$$

Beweis.

Sei Q-reelles Polynom n-tes Grades, d.h. es gilt $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
dQ(W_t) &= d\left(\sum_{i=0}^{n} a_i W_t^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,dW_t^i \\
&\overset{A3}{=} \sum_{i=2}^{n} a_i \left(iW_t^{i-1}\,dW_t + \frac{1}{2}i(i-1)W_t^{i-2}\,dt\right) + a_1\,dW_t \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i i W_t^{i-1}\right) dW_t + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{n} a_i i(i-1)W_t^{i-2}\right) dt \\
&= Q'(W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}Q''(W_t)\,dt
\end{aligned}$$

□