Übung zur Finanzmathematik II

Denis Boldin, Patrick Schlarmann

Universität Mannheim

Mannheim, Herbstsemester 2014

Aufgabe 1. Sei W_t standardisierte Brownsche Bewegung und $t_0 \geq 0$ eine Konstante. Beweisen Sie, dass

$$\widetilde{W}_t := W_{t+t_0} - W_{t_0} \quad \text{für} \;\; t \geq 0$$

ebenfalls eine standardisierte Brownsche Bewegung ist.
Beweis.

I) $\widetilde{W}_0 = W_{t_0} - W_{t_0} = 0$. (fast sicher)

II) $\widetilde{W}_t$ ist stetig, als Komposition von stetigen Funktionen. (fast sicher)

III) Normalverteilung der Zuwächse: für alle $0 \leq s < t$ gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s &= W_{t+t_0} - W_{t_0} - W_{s+t_0} + W_{t_0} \\ &= W_{t+t_0} - W_{s+t_0} \sim N(0, t-s) \end{aligned}$$

IV) Unabhängigkeit der Zuwächse: für alle $0 \leq l < k < s < t$ gilt

$$\mathrm{Cov}\left[\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s, \widetilde{W}_k - \widetilde{W}_l\right] = \mathbb{E}\left[\left(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s\right)\left(\widetilde{W}_k - \widetilde{W}_l\right)\right] = \ldots$$

Beweis Fortsetzung

$$\ldots = \mathbb{E}\left[\left(W_{t+t_0} - W_{s+t_0}\right)\left(W_{k+t_0} - W_{l+t_0}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[W_{t+t_0}W_{k+t_0} - W_{s+t_0}W_{k+t_0} - W_{t+t_0}W_{l+t_0} + W_{s+t_0}W_{l+t_0}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[W_{t+t_0}W_{k+t_0}\right] - \mathbb{E}\left[W_{s+t_0}W_{k+t_0}\right] - \mathbb{E}\left[W_{t+t_0}W_{l+t_0}\right] + \mathbb{E}\left[W_{s+t_0}W_{l+t_0}\right]$$
$$= (k+t_0) - (k+t_0) - (l+t_0) + (l+t_0) = 0.$$

Daraus folgt, dass die Zuwächse unkorelliert und wegen ihrer Normalverteilung somit unabhängig sind. $\square$

Aufgabe 2. Beweisen Sie: Sind s und t Stoppzeiten, so ist auch

$$s \wedge t := \min\{s, t\}$$

Stoppzeit.

Beweis.

$s \wedge t$ ist Stoppzeit, falls für jedes $u \geq 0$ gilt

$$\{\omega \mid s(\omega) \wedge t(\omega) \leq u\} \in \mathcal{F}_u.$$

Sei $u \geq 0$, dann gilt

$$\{\omega \mid s(\omega) \wedge t(\omega) \leq u\} = \underbrace{\{\omega \mid s(\omega) \leq u\}}_{\in \mathcal{F}_u} \cup \underbrace{\{\omega \mid t(\omega) \leq u\}}_{\in \mathcal{F}_u} \in \mathcal{F}_u.$$

$\square$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jede Funktion auf der positiven reellen Gerade mit endlicher Variation als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen dargestellt werden kann.

Beweis.

Wir setzen für $0 \leq x < \infty$

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(V(f;0,x) + f(x)\right),$$
$$g(x) = \frac{1}{2}\left(V(f;0,x) - f(x)\right).$$

Dann sind g und h wohldefiniert und es folgt

$$f(x) = h(x) - g(x).$$

Weiter folgt für alle $y < x$

$$V(f;0,x) = V(f;0,y) + V(f;y,x) \geq V(f;0,y) + |f(x) - f(y)|$$

und somit

$$h(x) - h(y) \geq 0 \quad \text{und} \quad g(x) - g(y) \geq 0.$$

□

Aufgabe 4. Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ standardisierte Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass für die quadratische Variation der Brownschen Bewegung $[W,W](T)$, $T \geq 0$ gilt

$$[W,W](T) = T \quad \text{in} \quad L^2(P).$$

Beweis.

Gegeben sei eine Partition $Z = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ des Intervalls $[0,T]$. Wir bezeichnen mit $\|Z\|$ die maximale Schrittlänge der Partition Z, d.h.

$$\|Z\| = \max_{j=0,\cdots,n-1} (t_{j+1} - t_j)$$

Nach Definition von quadratischer Variation eines Prozesses gilt

$$[W,W]\,(T) = \lim_{\|Z\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left[W(t_{j+1}) - W(t_j)\right]^2 = \lim_{\|Z\|\to 0} Q_Z,$$

wobei

$$Q_Z = \sum_{j=0}^{n-1} \left[W(t_{j+1}) - W(t_j)\right]^2.$$

Zunächst berechnen wir den Erwartungswert und die Varianz von Q_Z. Es gilt

$$\mathbb{E}\left[Q_Z\right] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^2\right] = \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = T,$$

und somit $\lim_{\|Z\|\to 0} \mathbb{E}\left[Q_Z\right] = T$.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Var}\left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - (t_{j+1} - t_j)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^4\right] - 2(t_{j+1} - t_j)\mathbb{E}\left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2\right] \\
&\qquad + (t_{j+1} - t_j)^2 \\
&\overset{\text{B6 A2}}{=} 3\left(t_{j+1} - t_j\right)^2 - 2\left(t_{j+1} - t_j\right)^2 + \left(t_{j+1} - t_j\right)^2 \\
&= 2(t_{j+1} - t_j)^2.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{\|Z\|\to 0} \operatorname{Var}[Q_Z] &= \lim_{\|Z\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{Var}\left[\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^2\right] \\
&= \lim_{\|Z\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} 2\left(t_{j+1} - t_j\right)^2 \\
&\leq \lim_{\|Z\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} 2\|Z\|(t_{j+1} - t_j) \\
&= \lim_{\|Z\|\to 0} 2\|Z\|T = 0.
\end{aligned}$$

Wir mussten zeigen:

$$\lim_{\|Z\|\to 0} \mathbb{E}\left[\left(Q_Z - T\right)^2\right] = 0$$

Da $\mathbb{E}[Q_Z] = T$ folgt

$$\lim_{\|Z\|\to 0} \mathbb{E}\left[\left(Q_Z - T\right)^2\right] = \lim_{\|Z\|\to 0} \mathbb{E}\left[\left(Q_Z - \mathbb{E}[Q_Z]\right)^2\right] = \lim_{\|Z\|\to 0} \operatorname{Var}[Q_Z] = 0$$

□

Lösung der Zusatzaufgabe von letzter Woche

Seien $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ sei wie folgt definiert:

$$P\{a\} = \frac{1}{6},\ P\{b\} = \frac{1}{3},\ P\{c\} = \frac{1}{4},\ P\{d\} = \frac{1}{4}.$$

Weiter seien X und Y zwei Zufallsvariablen gegeben durch

$$X(a) = 1,\ X(b) = 1,\ X(c) = -1,\ X(d) = -1,$$
$$Y(a) = 1,\ Y(b) = -1,\ Y(c) = 1,\ Y(d) = -1.$$

Zuletzt definieren wir $Z = X + Y$.

i) Zählen Sie alle Mengen in $\sigma(X)$ auf.

ii) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Y \mid X]$ (d.h. geben Sie die Werte dieser Zufallsvariable für a, b, c und d an).

iii) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Z \mid X]$.

iv) Mit Hilfe von ii) und iii) berechnen Sie $\mathbb{E}[Z \mid X] - \mathbb{E}[Y \mid X]$. Berechnen Sie erneut $\mathbb{E}[Z \mid X] - \mathbb{E}[Y \mid X]$ unter der Verwendung von Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes. Stimmen die Ergebnisse überein?

Lösung von i)

i) Zählen Sie alle Mengen in $\sigma(X)$ auf!

Sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } -1 \notin B \text{ und } 1 \notin B \\ \{a,b\} & \text{falls } -1 \notin B \text{ und } 1 \in B \\ \{c,d\} & \text{falls } -1 \in B \text{ und } 1 \notin B \\ \{a,b,c,d\} & \text{falls } -1 \in B \text{ und } 1 \in B \end{cases}$$

$\{\emptyset, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$ ist bereits eine σ-Algebra über Ω, somit:

$$\sigma(X) = \{\emptyset, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$$

Lösung von ii)

ii) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Y \mid X]$ (d.h. geben Sie die Werte dieser Zufallsvariable für a, b, c und d an).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y \mid X](a) &= \mathbb{E}[Y \mid X = X(a)] \\
&= \mathbb{E}[Y \mid X = 1] \\
&= 1 \cdot P(Y = 1 | X = 1) - 1 \cdot P(Y = -1 | X = 1) \\
&= \frac{P(\{a\})}{P(\{a, b\})} - \frac{P(\{b\})}{P(\{a, b\})} \\
&= 1/3 - 2/3 = -1/3 = \mathbb{E}[Y | X](b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y \mid X](c) &= \mathbb{E}[Y \mid X = X(c)] \\
&= \mathbb{E}[Y \mid X = -1] \\
&= 1 \cdot P(Y = 1 | X = -1) - 1 \cdot P(Y = -1 | X = -1) \\
&= \frac{P(\{c\})}{P(\{c, d\})} - \frac{P(\{d\})}{P(\{c, d\})} \\
&= 1/2 - 1/2 = 0 = \mathbb{E}[Y | X](d)
\end{aligned}$$

Lösung von iii)

iii) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Z \mid X]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z \mid X](a) &= \mathbb{E}[Z \mid X = X(a)] \\
&= \mathbb{E}[X + Y \mid X = 1] \\
&= \mathbb{E}[1 + Y \mid X = 1] \\
&= 2 \cdot P(Y = 1 | X = 1) - 0 \cdot P(Y = -1 | X = 1) \\
&= 2 \cdot \frac{P(\{a\})}{P(\{a, b\})} \\
&= 2/3 = \mathbb{E}[Z \mid X](b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z \mid X](c) &= \mathbb{E}[Z \mid X = X(c)] \\
&= \ldots \\
&= -1 = \mathbb{E}[Z \mid X](d)
\end{aligned}$$

Lösung von iv)

iv) Mit Hilfe von ii) und iii) berechnen Sie $\mathbb{E}[Z \mid X] - \mathbb{E}[Y \mid X]$. Berechnen Sie erneut $\mathbb{E}[Z \mid X] - \mathbb{E}[Y \mid X]$ unter der Verwendung von Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes. Stimmen die Ergebnisse überein?

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}[Z \mid X] - \mathbb{E}[Y \mid X])(a) &= 2/3 - (-1/3)\\ &= 1\\ &= (\mathbb{E}[Z \mid X] - \mathbb{E}[Y \mid X])(b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}[Z \mid X] - \mathbb{E}[Y \mid X])(c) &= -1 - 0\\ &= -1\\ &= (\mathbb{E}[Z \mid X] - \mathbb{E}[Y \mid X])(d)\end{aligned}$$

Andererseits

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z \mid X] - \mathbb{E}[Y \mid X] &= \mathbb{E}[X + Y \mid X] - \mathbb{E}[Y \mid X]\\ &= \mathbb{E}[X \mid X]\\ &= X\end{aligned}$$

Passt, da $X(a) = X(b) = 1$ und $X(c) = X(d) = -1$.