Übung zur Finanzmathematik II

Denis Boldin, Patrick Schlarmann

Universität Mannheim

Mannheim, Herbstsemester 2014

Aufgabe 1. W_t sei normalisierte Brownsche Bewegung. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte von W_t^2.

Beweis.

$$\begin{aligned}
P\left(W_t^2 \leq x\right) &= P\left(W_t^2 \in (-\infty, x]\right) = P\left(W_t^2 \in [0, x]\right) \\
&= P\left(-\sqrt{x} \leq W_t \leq \sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2t}}\, dy \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2t}}\, dy
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial P\left(W_t^2 \leq x\right)}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x}{2t}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t x}} e^{-\frac{x}{2t}}$$

und daraus für Wahrscheinlichkeitsdichte f von W_t^2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t x}} e^{-\frac{x}{2t}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$\square$

Aufgabe 3. Seien W_t, $t \in [0,1]$ Brownsche Bewegung und $X_t := W_t - tW_1$ für $t \in [0,1]$. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X_t]$ und die Kovarianz $\operatorname{Cov}[X_s, X_t]$ für beliebige $s, t \in [0,1]$.

Beweis.

Sei $s \leq t$, $s, t \in [0,1]$.

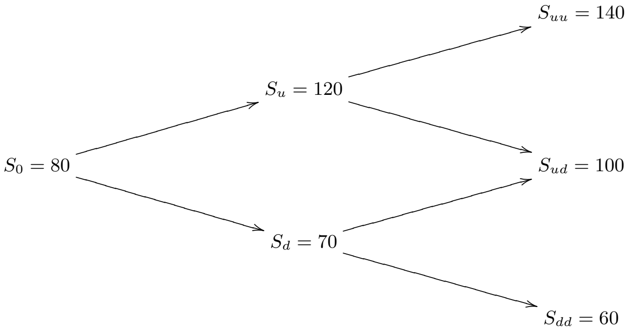
$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[W_t - tW_1] = \mathbb{E}[W_t] - t\mathbb{E}[W_1] = 0$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}[X_s, X_t] &= \operatorname{Cov}[W_s, W_t] - t \operatorname{Cov}[W_s, W_1] \\
&\qquad - s \operatorname{Cov}[W_1, W_t] + st \operatorname{Cov}[W_1, W_1] \\
&= s - st - st + st \\
&= s(1-t).
\end{aligned}$$

bzw. im allgemeinen Fall

$$\operatorname{Cov}[X_s, X_t] = s \wedge t - st \quad \square$$

Aufgabe 4. Die Kursentwicklung der S-Aktie für die nächsten zwei Jahre ist in folgendem Binomialbaum dargestellt. Die Zinsstrukturkurve ist flach bei 5 % p.a.



A) Bewerten Sie einen amerikanischen Put auf die S-Aktie mit Basispreis 100 und Fälligkeit in $T = 2$.

B) Wie ändert sich der Put-Preis, wenn die Wahrscheinlichkeiten für eine Abwärtsbewegung des Aktienkurses zunehmen, der oben dargestellte Binomialbaum mit der zugehörigen Aktienkursentwicklung sich jedoch nicht ändert?

Beweis

Zunächst berechnen wir risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten. Aus

$$
\begin{aligned}
p_u^* S_{uu} + (1 - p_u^*) S_{ud} &= S_u (1 + r) \\
p_d^* S_{du} + (1 - p_d^*) S_{dd} &= S_d (1 + r) \\
p^* S_u + (1 - p^*) S_d &= S_0 (1 + r)
\end{aligned}
$$

folgt

$$
\begin{aligned}
p_u^* &= \frac{S_u(1+r) - S_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = \frac{120(1+0.05) - 100}{140 - 100} = 0.65, \quad 1 - p_u^* = 0.35, \\
p_d^* &= \frac{S_d(1+r) - S_{dd}}{S_{du} - S_{dd}} = \frac{70(1+0.05) - 60}{100 - 60} = 0.3375, \quad 1 - p_d^* = 0.6625, \\
p^* &= \frac{S_0(1+r) - S_d}{S_u - S_d} = \frac{80(1+0.05) - 70}{120 - 70} = 0.28, \quad 1 - p^* = 0.72.
\end{aligned}
$$

Beweis

Für Put-Preise und mit $P_{uu} = 0$, $P_{ud} = 0$ und $P_{dd} = 40$ gilt dann $P_u = 0$

i) ohne Ausübung

$$P_d = \frac{P_{ud}}{1+r} p_d^* + \frac{P_{dd}}{1+r}(1 - p_d^*) = \frac{40}{1.05} \cdot 0.6625 \approx 25.24.$$

ii) mit Ausübung

$$P_d = 100 - 70 = 30.$$

$\Longrightarrow$ Ausübung ist vorteilhaft $\Longrightarrow$ $P_d = 30.$

$\Longrightarrow$

$$P_0 = \frac{P_d}{1+r}(1 - p^*) = \frac{30}{1.05} \cdot 0.72 = 20.57.$$

Zu b): Die erwarteten Renditen haben keinen Einfluss auf die Optionspreise. Da der Baum sich nicht ändert, ändert sich auch nichts an der risikoneutralen Bewertung. Somit bleibt der Put-Preis gegenüber zu a) unverändert.

Aufgabe 2 i). Zeigen Sie, dass falls W_t Brownsche Bewegung ist, so gilt

$$\frac{W_t}{t} \to 0 \quad \text{in } L^2(P) \text{ für} \quad t \to \infty.$$

Beweis.

Wir müssen zeigen:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\left|\frac{W_t}{t} - 0\right|^2\right] = 0$$

Berechnung:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{W_t^2}{t^2}\right] &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}\mathbb{E}\left[W_t^2\right] \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}\left(\mathrm{Var}\left[W_t\right] + \mathbb{E}\left[W_t\right]^2\right) \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}(t+0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} = 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{W_t}{t} \to 0 \quad \text{im 2-ten Mittel bzw. in } L^2(P) \text{ für } t \to \infty. \quad \square$$

Aufgabe 2 ii). Berechnen Sie

$$P\left(W(t) \leq 0 \text{ für } t = 0, 1, 2\right).$$

Beweis.

Es gilt

$$\operatorname{Cov}\left[W(1), W(2)\right] = \min(1,\, 2) = 1.$$

$$\operatorname{Var}\left[W(t)\right] = t$$

Daraus folgt

$$P\left(W(t) \leq 0 \text{ für } t = 0, 1, 2\right) = P\left(W(1) \leq 0, W(2) \leq 0\right) = N_2\left(\mathbf{a}\,;\boldsymbol{\Sigma}\right)$$

mit

$$\mathbf{a} := (0, 0) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Sigma} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $P\left(W(t) \leq 0 \text{ für } t = 0, 1, 2\right) = 0.375$ (mit MATLAB).

2-ter Lösungsvorschlag

Wir definieren $\widetilde{W}(1) := W(2) - W(1)$. Dann ist $\widetilde{W}(1)$ standardnormalverteilt und unabhängig von $W(1)$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
P\left(W(1) \leq 0, W(2) \leq 0\right) &= P\left(W(1) \leq 0, W(2) - W(1) + W(1) \leq 0\right) \\
&= P\left(W(1) \leq 0, \widetilde{W}(1) \leq -W(1)\right) \\
&= \int_{-\infty}^{0} P\left(\widetilde{W}(1) \leq -x\right) \varphi_{W(1)}(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} N(-x) \frac{dN(x)}{dx} dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} (1 - N(x))\, dN(x) \\
&= \int_{0}^{\frac{1}{2}} (1 - y)\, dy = \frac{3}{8} = 0.375
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 5 (*Zusatzaufgabe*). Zeigen Sie die folgende Abschätzung

$$P(W(1) \geq c) < e^{-c^2/2}, \quad c > 0$$

mit $W(t)$ eine standardisierte Brownsche Bewegung.

Beweis.

Aus $W(1) \sim N(0,1)$ folgt für $c \geq 1$

$$P(W(1) \geq c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{x} dx$$

$$\leq \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c^2}{2}} \leq e^{-\frac{c^2}{2}}.$$

Für $0 < c \leq 1$ folgt

$$e^{\frac{-c^2}{2}} \geq e^{-\frac{1}{2}} \geq 1 - \frac{1}{2} = P(W(1) \geq 0) \geq P(W(1) \geq c).$$

□

Zusatzaufgabe (Wird nicht korrigiert!)

Seien $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ sei wie folgt definiert:

$$P\{a\} = \frac{1}{6},\ P\{b\} = \frac{1}{3},\ P\{c\} = \frac{1}{4},\ P\{d\} = \frac{1}{4}.$$

Weiter seien X und Y zwei Zufallsvariablen gegeben durch

$$X(a) = 1,\ X(b) = 1,\ X(c) = -1,\ X(d) = -1,$$
$$Y(a) = 1,\ Y(b) = -1,\ Y(c) = 1,\ Y(d) = -1.$$

Zuletzt definieren wir $Z = X + Y$.

i) Zählen Sie alle Mengen in $\sigma(X)$ auf.

ii) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Y \mid X]$ (d.h. geben Sie die Werte dieser Zufallsvariable für a, b, c und d an).

iii) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Z \mid X]$.

iv) Mit Hilfe von ii) und iii) berechnen Sie $\mathbb{E}[Z \mid X] - \mathbb{E}[Y \mid X]$. Berechnen Sie erneut $\mathbb{E}[Z \mid X] - \mathbb{E}[Y \mid X]$ unter der Verwendung von Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes. Stimmen die Ergebnisse überein?