Übung zur Finanzmathematik II

Denis Boldin, Patrick Schlarmann

Universität Mannheim

Mannheim, Herbstsemester 2014

Aufgabe 1. Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert μ und Varianz σ^2. Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion von X, d.h. die Funktion

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{uX}\right].$$

Hinweis: Dichtefunktion von X ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Beweis

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ verteilt, dann folgt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{uX}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} \cdot e^{\frac{-x^2+2\mu x-\mu^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\frac{-\mu^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2+2\sigma^2 ux+2\mu x}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\frac{-\mu^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2+2(\mu+\sigma^2 u)x}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(\mu+\sigma^2 u)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{(\mu+\sigma^2 u)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= e^{\frac{-\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{(\mu+\sigma^2 u)^2}{2\sigma^2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-(\mu+\sigma^2 u))^2}{2\sigma^2}} dx}_{=1} \\
&= e^{\frac{-\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{\mu^2+2\sigma^2 u\mu+\sigma^4 u^2}{2\sigma^2}} = e^{\frac{2\sigma^2 u\mu+\sigma^4 u^2}{2\sigma^2}} = e^{u\mu+\frac{u^2\sigma^2}{2}}
\end{aligned}
$$

$\square$

Aufgabe 2. Für eine normalverteilte Zufallsvariable $X \sim N(0, \sigma^2)$ mit Mittelwert 0 und Varianz σ^2 zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgende Identitäten

$$\mathbb{E}\left[X^{2n}\right] = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sigma^{2n}, \quad \mathbb{E}\left[X^{2n+1}\right] = 0.$$

Beweis.

IA: Für $n = 0$ gilt

$$\mathbb{E}\left[X^0\right] = 1, \quad \underbrace{\mathbb{E}\left[X^1\right] = 0}_{\text{nach Vor.}}$$

IV: Die Behauptung gelte für ein $n \in N$, d.h.

$$\mathbb{E}\left[X^{2n}\right] = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sigma^{2n}, \quad \mathbb{E}\left[X^{2n+1}\right] = 0.$$

Beweis Fortsetzung

IS: $n \to n+1$

$$\underbrace{\mathbb{E}\left[X^{2n}\right]}_{\overset{IV}{=}\frac{(2n)!}{2^n n!}\sigma^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\frac{x}{\sigma^2}\,dx.$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}\left[X^{2(n+1)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{(2n)!(2n+1)}{2^n n!}\sigma^{2n+2}$$

$$= \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{2^n n!(2n+2)}\sigma^{2n+2} = \frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}(n+1)!}\sigma^{2(n+1)}.$$

Beweis Fortsetzung

IS: $n \to n+1$

$$\underbrace{\mathbb{E}\left[X^{2n+1}\right]}_{\stackrel{IV}{=}0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{x^{2n+2}}{2n+2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\frac{x}{\sigma^2}\,dx.$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}\left[X^{2(n+1)+1}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+3} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = 0.$$

□

Aufgabe 3. Betrachten Sie ein N-periodiges Cox-Ross-Rubinstein-Modell. In diesem Finanzmarkt-Modell gibt es zwei Anlageklassen

$$S_n := (S_n^0, S_n^1)_{n=0,\dots,N}.$$

Dabei entwickeln diese sich wie folgt:

$$S_n^0 = (1+r)^n \quad \text{für} \quad n = 0, \dots N$$

und

$$S_n^1 = \begin{cases} uS_{n-1}^1 & \text{mit } \; p > 0 \\ dS_{n-1}^1 & \text{mit } \; 1-p > 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad n = 1, \dots, N, \quad S_0^1 = S > 0$$

mit $d < 1+r < u$. Geben Sie die Handelsstrategie $\phi_n := (\phi_n^0, \phi_n^1)_{n=0,\dots,N}$ an, die den Wert einer Call-Option zur Zeit N mit Basispreis K dupliziert.

Beweis

Falls ϕ die Call-Option dupliziert, so soll es zum Zeitpunkt $t = n$ gelten

$$C(n, S_n^1) = \phi_n^0 S_n^0 + \phi_n^1 S_n^1$$

bzw.

$$C(n, uS_{n-1}^1) = \phi_n^0 S_n^0 + \phi_n^1 uS_{n-1}^1$$
$$C(n, dS_{n-1}^1) = \phi_n^0 S_n^0 + \phi_n^1 dS_{n-1}^1$$

woraus folgt

$$\phi_n^0 = \frac{uC(n, dS_{n-1}^1) - dC(n, uS_{n-1}^1)}{S_n^0(u-d)},$$

$$\phi_n^1 = \underbrace{\frac{C(n, uS_{n-1}^1) - C(n, dS_{n-1}^1)}{S_{n-1}^1(u-d)}}_{\Delta\text{ - Call}}.$$

$\square$

Aufgabe 4. Sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal mit $\mathbb{E}\left[M_t^2\right] < \infty$. Beweisen Sie, dass für alle $0 \leq s < t$ gilt

$$\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 \,|\, \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2 \,|\, \mathcal{F}_s\right].$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 \,|\, \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[M_t^2 - 2M_tM_s + M_s^2 \,|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 - 2(M_t - M_s + M_s)M_s + M_s^2 \,|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 - 2(M_t - M_s)M_s - 2M_s^2 + M_s^2 \,|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2 \,|\, \mathcal{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[2(M_t - M_s)M_s \,|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2 \,|\, \mathcal{F}_s\right] - 2M_s \underbrace{\mathbb{E}\left[M_t - M_s \,|\, \mathcal{F}_s\right]}_{=0, \text{ da } M_t \text{ Martingal}} \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2 \,|\, \mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

□