Übung zur Finanzmathematik II

Denis Boldin, Patrick Schlarmann

Universität Mannheim

Mannheim, Herbstsemester 2014

Aufgabe 1. Der Vermögensanleger eines Versicherungsunternehmers VU kauft zu Jahresbeginn 10000 Aktien eines Unternehmens U zum aktuellen Börsenpreis von 30 €.
Auf dem Markt sind Put- und Call-Optionen auf Aktien des Unternehmens U zum Ausübungspreis 28.50 € und Ausübungszeitpunkt 31.12 zu Preisen $C = 4.80$ € und $P = 1.90$ € vorhanden. Aktueller Einjahreszins beträgt 8 %.
Durch Kauf von 10000 obigen Put-Optionen sichert der Vermögensanleger von VU obige Kapitalanlage so ab, dass zum 31.12 der Wert von 285000 € für das Versicherungsunternehmen VU nicht unterschritten werden kann.

a) Mit welcher alternativen Anlagestrategie hätte der Vermögensanleger dieselben Gewinnchancen zum 31.12 realisieren können bei geringeren Kosten?

b) Beschreiben Sie explizit Arbitrage-Strategien, die sich aufgrund der hier vorliegenden Put-Call-Preisrelationen ergeben.

c) Man gehe von korrekten Aktien- und Optionspreisen aus und nehme an, dass angegebene Zinsrate nicht stimmt. Für welcher Jahreszinssatz ergeben sich dann keine Arbitragemöglichkeiten in der oben beschriebenen Situation?

Beweis von a)

Zum Ausübungszeitpunkt T gilt:

$$P_T + S_T = (K - S_T)^+ + S_T = \max\{S_T, K\} = (S_T - K)^+ + K = C_T + K.$$

Alternative Anlagestrategie mit dieselben Gewinnchancen ist somit der Kauf von 10000 Call-Optionen und gleichzeitige Geldanlage in Höhe von $\frac{285000}{(1.08)}$€ zur $8\,\%$.

Kostenvergleich der beiden Anlagestrategien:

Strategie 1: $10000 \cdot (P_0 + S_0) = 10000 \cdot (1.9 + 30) = 319000$€.

Strategie 2: $10000 \cdot (C_0 + \frac{K}{1.08}) \approx 10000 \cdot (4.8 + 26.4) = 312000$€.

$\Longrightarrow$ Kosten der Strategie 1 $>$ Kosten der Strategie 2.

Beweis von b)

Aufgabe 1b. Beschreiben Sie explizit Arbitrage-Strategien, die sich aufgrund der hier vorliegenden Put-Call-Preisrelationen ergeben.

Tabelle: Arbitragetableau

	$t=0$	$t=T$	
		$S_T \leq 28.5$	$S_T > 28.5$
Verkauf einer Put-Option	$+1.9$	$-(28.5 - S_T)$	0
Verkauf einer Aktie	$+30$	$-S_T$	$-S_T$
Kauf einer Call-Option	-4.8	0	$S_T - 28.5$
Geldanlage in Höhe von	$-\frac{28.5}{1.08}$	$+28.5$	$+28.5$
Gesamtergebnis	$+0.71$	0	0

$\Longrightarrow$ free lunch!

Beweis von c)

Aufgabe 1c. Man gehe von korrekten Aktien- und Optionspreisen aus und nehme an, dass angegebene Zinsrate nicht stimmt. Für welcher Jahreszinssatz ergeben sich dann keine Arbitragemöglichkeiten in der oben beschriebenen Situation?

Nach der Put-Call-Parität soll gelten

$$P_0 + S_0 = \frac{K}{1+r} + C_0.$$

Somit folgt für den Jahreszins r

$$1.90 + 30 = \frac{28.50}{1+r} + 4.80.$$

und daraus $r \approx 5.17\%$.

□

Aufgabe 2. Berechnen Sie für das einperiodige Binomialmodell das Martingalmaß für den Prozess $\frac{B_t}{S_t}$, also das Maß $\bar{P}$, für das gilt

$$\mathbb{E}^{\bar{P}}\left[\frac{B_1}{S_1}\right] = \frac{B_0}{S_0}.$$

Hierbei bezeichnet B_t den Wert des risikolosen Bonds zur Zeit $t \in \{0,1\}$ und S_t den Preis des risikobehafteten Basispapiers. Verwenden Sie dieses Maß, um analog zur Vorlesung den Preis einer europäischen Call-Option zu berechnen. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Ergebnis aus der Vorlesung.

Beweis.
In einem einperiodigen Binärmodell gilt $B_1 = B_0(1+r)$,

$$S_1 = \begin{cases} uS_0 \text{ mit } 0 < p < 1 \\ dS_0 \text{ mit } 1-p \end{cases} \qquad \text{und} \quad C_1 = \begin{cases} C_u = (uS_0 - K)^+ \\ C_d = (dS_0 - K)^+. \end{cases}$$

Aufgabe 2. Aus

$$\mathbb{E}^{\bar{P}}\left[\frac{B_1}{S_1}\right] = \frac{B_0}{S_0}$$

folgt somit

$$\frac{B_0}{S_0} = \mathbb{E}^{\bar{P}}\left[\frac{B_1}{S_1}\right] = \frac{B_1}{S_u}\bar{p} + \frac{B_1}{S_d}(1-\bar{p}) = \frac{(1+r)B_0}{uS_0}\bar{p} + \frac{(1+r)B_0}{dS_0}(1-\bar{p}).$$

$$\Rightarrow \bar{p} = \frac{u(1+r-d)}{(u-d)(1+r)} \quad \text{und} \quad 1-\bar{p} = \frac{d\,(u-(1+r))}{(u-d)(1+r)}. \qquad (*)$$

Für den Preis einer europäischen Call-Option würde somit gelten:

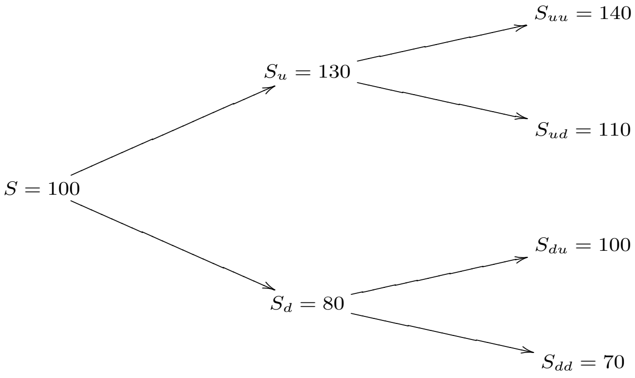
$$C_0 = B_0\,\mathbb{E}^{\bar{P}}\left[C_1\right] = \frac{\bar{p}}{1+r}C_u + \frac{1-\bar{p}}{1+r}C_d$$

Aus der Vorlesung haben wir:

$$C_0 = \frac{1+r-d}{u-d}\,\frac{C_u}{1+r} + \frac{u-(1+r)}{u-d}\,\frac{C_d}{1+r} \overset{(*)}{=} \frac{C_u}{u}\bar{p} + \frac{C_d}{d}(1-\bar{p})$$

$$= S_0\left(\frac{C_u}{uS_0}\bar{p} + \frac{C_d}{dS_0}(1-\bar{p})\right) = S_0\,\mathbb{E}^{\bar{P}}\left[\frac{C_1}{S_1}\right].$$

Aufgabe 3. Betrachten Sie folgendes 2-periodigen Finanzmarktmodell mit einer Aktie und einer risikolosen Anlage. Die Aktienkursentwicklung ist in der folgenden Abbildung gegeben. Die Wahrscheinlichkeit für jede Aktienbewegung sei größer als 0. Der risikolose Zinssatz r beträgt $0\,\%$ pro Periode. Berechnen Sie die Preise von europäischen Call-Optionen zu Basispreisen 50, 100 und 150.



Beweis

Aufgabe 3. Zunächst berechnen wir risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten. Aus

$$\begin{aligned} p_u^* S_{uu} + (1 - p_u^*) S_{ud} &= S_u \\ p_d^* S_{du} + (1 - p_d^*) S_{dd} &= S_d \\ p^* S_u + (1 - p^*) S_d &= S \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} p_u^* &= \frac{S_u - S_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}, \quad 1 - p_u^* = \frac{1}{3}, \\ p_d^* &= \frac{S_d - S_{dd}}{S_{du} - S_{dd}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \quad 1 - p_d^* = \frac{2}{3}, \\ p^* &= \frac{S - S_d}{S_u - S_d} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}, \quad 1 - p^* = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Beweis Fortsetzung

Call-Preis zur Zeit $t = 0$ mit Basispreis K berechnet sich wie folgt

$$\begin{aligned} C_u(K) &= p_u^*(S_{uu} - K)^+ + (1 - p_u^*)(S_{ud} - K)^+ \\ C_d(K) &= p_d^*(S_{ud} - K)^+ + (1 - p_d^*)(S_{dd} - K)^+ \\ C(K) &= p^* C_u(K) + (1 - p^*) C_d(K) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für $C(50), C(100), C(150)$:

$$\begin{aligned} C_u(50) &= \frac{2}{3} \cdot 90 + \frac{1}{3} \cdot 60 = 80, \\ C_d(50) &= \frac{1}{3} \cdot 50 + \frac{2}{3} \cdot 20 = 30, \\ C(50) &= \frac{2}{5} \cdot 80 + \frac{3}{5} \cdot 30 = 50, \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} C(100) &= 12, \\ C(150) &= 0. \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 4. Sei K der von der Vektoren $h_1, \ldots, h_m$ aufgespannte Kegel in $\mathbb{R}^m$

$$K := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i \mid \lambda_i \geq 0 \; \forall \, i = 1, \ldots, m \right\}.$$

Zeigen Sie, dass K abgeschlossen in $\mathbb{R}^m$ ist.

Beweis.
Seien $\{h_1, \ldots, h_k\} \subset \{h_1, \ldots, h_m\}$ linear unabhängig, so dass gilt

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i \mid \lambda_i \geq 0 \; \forall \, i = 1, \ldots, k \right\}.$$

Sei $a_n \in K$ eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} a_n = a$. Zu zeigen ist, dass $a \in K$ ist.
Da $a_n \in K$ ist, es existieren $\lambda_i^{(n)}$ mit

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(n)} h_i.$$

Beweis Fortsetzung

Da $h_1, \ldots, h_k$ linear unabhängig sind, folgt, dass a_n genau dann konvergiert, wenn $\lambda_i^{(n)}$ konvergieren. Falls $\lambda_i^{(n)}$ konvergieren, dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_i^{(n)} = \lambda_i \geq 0.$$

Insgesamt folgt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(n)} h_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i \in K.$$

$\square$

Bemerkung: Im Allg. schreibe K als

$$K = \bigcup_{\substack{\{h_1,\ldots,h_k\} \text{ unabh.} \\ \subseteq \{h_1,\ldots,h_m\}}} M_k,$$

wobei

$$M_k := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i \mid \lambda_i \geq 0 \ \forall\, i = 1, \ldots, k \right\}$$

und führe den obigen Beweis für jedes M_k durch.

Zusatzaufgaben

Kennzeichen Sie in der folgenden Tabelle durch ein „$+$“ bzw. „$-$“ Zeichen, ob nach Ihrer Auffassung der Wert der Optionen bei einer Zunahme der Einflußfaktoren zunimmt „$+$“ oder abnimmt „$-$“ .

Einflußfaktor	am. Call	euro. Call	am. Put	euro. Put
Aktienkurs S				
Basispreis K				
Optionsfrist T				
Volatilität σ				
Zinsniveau r				

Lösung zur Zusatzaufgabe

Kennzeichen Sie in der folgenden Tabelle durch ein „$+$“ bzw. „$-$“ Zeichen, ob nach Ihrer Auffassung der Wert der Optionen bei einer Zunahme der Einflußfaktoren zunimmt „$+$“ oder abnimmt „$-$“ .

Einflußfaktor	am. Call	euro. Call	am. Put	euro. Put
Aktienkurs S	$+$	$+$	$-$	$-$
Basispreis K	$-$	$-$	$+$	$+$
Optionsfrist T	$+$	$+$	$+$	$-+$
Volatilität σ	$+$	$+$	$+$	$+$
Zinsniveau r	$+$	$+$	$-$	$-$

Zusatzaufgabe

Definition 2.1

*Ein **Forward** ist ein Vertrag zwischen Vertragspartnern A und B, abgeschlossen "heute" zum Zeitpunkt t = 0, wonach zum Zeitpunkt T der Partner A eine bestimmte Menge eines Assets (heutiger Marktpreis S_0) liefert und B dafür den Preis F zahlt.*

Aufgabe (Zusatzaufgabe). Bestimmen Sie den Preis F unter der Annahme, dass das Asset innerhalb von $0 \leq t < T$ weder Kosten verursacht noch Erträge erzielt.

Lösung zur Zusatzaufgabe

Betrachte zwei Portfolios:

A : Abschluss eines Forward (long).

Gesamtwert : $V_A(0) = 0$

B : Kauf eines Basispapiers, Verkauf von $\frac{S_0}{B_0}$ Zerobonds.

Gesamtwert: $V_B(0) = S_0 - S_0 = 0$

Zum Zeitpunkt T gilt

$$V_A(T) = S_T - F$$

$$V_B(T) = S_T - \frac{S_0}{B_0}$$

Mit dem Dominanzprinzip folgt somit:

$$F = \frac{S_0}{B_0} = e^{rT} S_0$$