Übung zur Finanzmathematik II

Denis Boldin, Patrick Schlarmann

Universität Mannheim

Mannheim, Herbstsemester 2014

Aufgabe 1. Eine einjährige Versicherung sehe folgendes Leistungs- bzw. Beitragszahlungsmodalitäten vor:
Durch Einnahme der Brutto-Einmalprämie $B =$ € 10000.- wird eine Ablaufleistung in Höhe von

$$A := \underbrace{\max\{0.04 \cdot 9500, (\frac{x(1)}{x(0)} - 1) \cdot 0.74 \cdot 9500\}}_{:=A_{var}} + \underbrace{9500}_{:=A_{fix}}$$

garantiert, dabei bezeichnet $x(1)$ den Stand des DAX-Indexes nach Ablauf eines Jahres und $x(0)$ den Stand des DAX-Indexes bei Abschluss des Vertrages. Zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses beträgt der Stand des DAX 3515 Punkte, ein europäischer Call mit einjähriger Laufzeit auf den DAX zum Ausübungspreis 3705 kostet € 101.5 und der risikolose Jahreszins ist 6.5 %.

Welcher Teilbetrag der Brutto-Einmalprämie bleibt dem Aktuar zur Deckung einer Todesfallleistung und von Verwaltungskosten, wenn eine kongruente Deckung der Gewinnversprechen in der Vermögensanlage vorgenommen wird?

Beweis

Zunächst bestimmen wir ein k, so dass für $x(1) \geq k$ gilt

$$A_{var} = \max\{0.04 \cdot 9500, (\frac{x(1)}{x(0)} - 1) \cdot 0.74 \cdot 9500\} = (\frac{x(1)}{x(0)} - 1) \cdot 0.74 \cdot 9500.$$

Dieses k ist die Lösung der Gleichung

$$0.04 = \left(\frac{k}{x(0)} - 1\right) 0.74.$$

Somit folgt

$$k = \left(\frac{0.04}{0.74} + 1\right) x(0) = \left(\frac{0.04}{0.74} + 1\right) 3515 = 3705.$$

Es gilt also

$$A_{var} = \begin{cases} 0.04 \cdot 9500 & x(1) < 3705 \\ (\frac{x(1)}{x(0)} - 1) \cdot 0.74 \cdot 9500 & x(1) \geq 3705 \end{cases}$$

Beweis

oder

$$
\begin{aligned}
A_{var} &= \left(\frac{3705 + (x(1) - 3705)^+}{x(0)} - 1\right) \cdot 0.74 \cdot 9500 \\
&= \left(\frac{3705}{x(0)} - 1\right) \cdot 0.74 \cdot 9500 + \frac{(x(1) - 3705)^+}{x(0)} \cdot 0.74 \cdot 9500 \\
&= 380 + 2\,(x(1) - 3705)^+ .
\end{aligned}
$$

Für die gesamte Ablaufleistung A zur Zeit $t = 1$ folgt daher

$$
\begin{aligned}
A(1) = A_{var} + A_{fix} &= 380 + 2\,(x(1) - 3705)^+ + 9500 \\
&= 9880 + 2\,\underbrace{(x(1) - 3705)^+}_{=c(1)} .
\end{aligned}
$$

Dem Aktuar bleibt also

$$
B - A(0) = 10000 - \frac{9880}{1.065} - 2 \cdot 101.5 \approx 520€
$$

zur Deckung einer Todesfallleistung und von Verwaltungskosten. $\square$

Aufgabe 2. Es sei $S(t) = 38$ der Preis einer Aktie zum Zeitpunkt t. Für $r = 5\,\%$, $\sigma = 30\,\%$ (auf Jahresbasis), $T - t = 1/3$ Jahre und Ausübungspreis $K = 35$ berechnen Sie den Wert der europäischen Call-Option nach der Black-Scholes-Formel.

Beweis.
Der Preis einer europäischen Call-Option nach Black-Scholes ist

$$c = c(S, t, K, T) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

wobei

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

$$\Longrightarrow \quad c = 4.6836 \text{ (MATLAB-Berechnung).} \quad :)$$

Beweis

Der Preis einer europäischen Call-Option nach Black-Scholes ist

$$c = c(S, t, K, T) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2).$$

$\Rightarrow$

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = 0.6576,$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = 0.4844.$$

Daraus folgt mithilfe von Normalverteilungstabelle

$$\begin{aligned} N(d_1) &= N(0.6576) \approx 0.4 \cdot N(0.657) + 0.6 \cdot N(0.658) \\ &= 0.4 \cdot 0.74441 + 0.6 \cdot 0.74473 = 0.74460 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(d_2) &= N(0.4844) \approx 0.6 \cdot N(0.484) + 0.4 \cdot N(0.485) \\ &= 0.6 \cdot 0.68581 + 0.4 \cdot 0.68616 = 0.68595 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$c = 38 \cdot N(d_1) - 35e^{-0.05\frac{1}{3}}N(d_2) \approx 4.68$$

Aufgabe 3. Der Vermögensanleger eines Versicherungsunternehmens VU kauft zu Jahresbeginn 10000 Aktien eines Unternehmens U zum aktuellen Börsenpreis von 40 Euro. Bank B bietet europäische Put-Optionen auf Aktien des Unternehmens U zur Konstellationen gemäß folgender Tabelle:

Basispreis/ Ausübungstermin	**30.6**	**30.9**	**31.12**
38	0.77	1.54	2.50
40	1.78	2.61	3.44
42	1.96	3.11	3.58

a) Wie kann der Vermögensanleger des Versicherungsunternehmens die Anlage von 10000 Aktien des Unternehmens U so absichern, dass der Wert der Geldanlage $10000 \cdot 40$ Euro zum Zeitpunkt des Bilanzstichtags 31.12 nicht unter 95 % des Anfangsanlagebetrages fällt? Welche "Versicherungsprämie" hat er für diese Portfolio-Absicherung zu entrichten?

Aufgabe Fortsetzung

b) Die im Konzernverbund ansässige Bank B möchte als Stillhalter der Verkaufs-Optionen das damit verbundene Risiko kongruent weitergeben und verkauft zeitgleich zu diesem Zweck an Privatkunden so genannte einjährige Aktienanleihen zum Stückpreis von 40 Euro,die folgendes Leistungsschema vorsehen:

In jedem Fall wird ein fester Zinssatz $p\,\%$ für die Geldanlage nach Ablauf eines Jahres gezahlt (feste Kuponzahlung). Außerdem wird zusätzlich zum 31.12 der Anlagebetrag zurückgezahlt, falls das Kursniveau der Aktie U zum 31.12 oberhalb des Wertes 38 Euro liegt. Im anderen Fall ($\leq$ 38 Euro) wird am 31.12 neben dem fest vereinbarten Kupon pro Stück Aktienanleihe je eine Aktie des Unternehmens U an den Kunden geliefert.

Mit welchem Zinssatz p (Kupon) kann aus Sicht der Bank die beschriebene Aktienanleihe maximal ausgestattet werden? Zeigen Sie, dass bei der Bank B nach erfolgreichem Verkauf der Aktienanleihen kein Risiko aus dem Verkauf der Put-Optionen an das Versicherungsunternehmen VU verbleibt.

Beweis von A)

Zur Zeit $t = 0$ (Jahresbeginn) hat der Vermögensanleger $V(0) = 400000$€ in Aktien U investiert. Zur Zeit $t = 1$ (zum 31.12 des Jahres) soll gelten

$$V(1) \geq 0.95V(0) = 380000\,€.$$

Durch den Kauf von 10000 Puts mit Basispreis 38 und Ausübungstermin 31.12 wird die Kapitalanlage so abgesichert, dass zum 31.12 gilt

$$\begin{aligned} 10000\,(U(1) + \max\{38 - U(1), 0\}) &= 10000 \cdot \max\{38, U(1)\} \\ &\geq 380000 \end{aligned}$$

d.h. der Wert von 380000 € wird nicht unterschritten.

Als „Versicherungsprämie“ für die Portfolio-Absicherung ist den Kaufpreis für 10000 Put-Optionen zu entrichten. Der Kaufpreis ist 25000 €.

Beweis von B)

Annahme: Die Bank B verkauft pro verkaufter Put-Option genau eine Anleihe (Warum?).
Insgesamt hat dann die Bank zur Zeit $t = 0$ pro Anleihe und Option folgende Einnahmen:

$$E := \underbrace{40}_{\text{Verkauf von Anleihe}} + \underbrace{2.5}_{\text{Verkauf von Option}} = 42.5$$

Zur Zeit $t = 1$ (am Jahresende) müssen die Zahlungen für die Anleiehe sowie für die Putoption (nur im Fall $U(1) \leq 38$) geleistet werden:

$$\begin{aligned} &42.5 \cdot 1.0475 - 40 \cdot p - 40 && \overset{!}{\geq} 0 \quad \text{falls } U(1) > 38 \text{ bzw.} \\ &42.5 \cdot 1.0475 - 40 \cdot p - U(1) && -\underbrace{(38 - U(1))}_{\text{Put-Option}} \overset{!}{\geq} 0 \quad \text{falls } U(1) \leq 38 \end{aligned}$$

Da p beide Ungleichungen erfüllen soll, folgt

$$p \leq \frac{42.5 \cdot 1.0475 - 40}{40} = 11.296875\%$$

Aufgabe 4. Betrachten Sie das folgende einperiodige Finanzmarktmodell mit einem Bond B und zwei Aktien S_1 und S_2. Die Preisentwicklung sei wie folgt:

$$B = 1 \longrightarrow B = \tfrac{10}{9}$$

$$S_1 = 5,\ S_2 = 10 \begin{cases} \nearrow & S_1 = X,\ S_2 = \tfrac{120}{9} \quad \text{mit} \quad p > 0 \\ \longrightarrow & S_1 = \tfrac{60}{9},\ S_2 = \tfrac{80}{9} \quad \text{mit} \quad q > 0 \\ \searrow & S_1 = \tfrac{40}{9},\ S_2 = \tfrac{80}{9} \quad \text{mit} \quad 1 - p - q > 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

I) Für $X = \frac{40}{9}$ sich Arbitragemöglichkeiten bieten, d.h. es gibt eine Handelsstrategie $H = (H_0, H_1, H_2)$, so dass für

$$V(t) := (H_0 \cdot B + H_1 \cdot S_1 + H_2 \cdot S_2)(t)$$

gilt $V(0) = 0$, $V(1) \geq 0$ und $\mathbb{E}\left[V(1)\right] > 0$.

II) Für $X = 5$ keine Arbitrage möglich ist.

Beweis von i) durch explizite Angabe der Arbitragemöglichkeit

Für $X = \frac{40}{9}$ gilt

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & S_1 = \frac{80}{9},\ S_2 = \frac{120}{9} \quad \text{mit} \quad p > 0 \\
S_1 = 10,\ S_2 = 10 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S_1 = \frac{120}{9},\ S_2 = \frac{80}{9} \quad \text{mit} \quad q > 0 \\
 & S_1 = \frac{80}{9},\ S_2 = \frac{80}{9} \quad \text{mit} \quad 1 - p - q > 0
\end{tikzcd}$$

$$B = 20 \longrightarrow B = \frac{200}{9}$$

Durch den Kauf von 20 Zerobonds und Verkauf von zwei Aktien S_1 und einer Aktie S_2 ist eine Arbitrage möglich. Da es gilt

$$V(0) = 20 \cdot 1 - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 10 = 0, \quad V(1) \geq 0$$

und

$$\mathbb{E}\left[V(1)\right] = \left(\frac{200}{9} - \frac{160}{9}\right)(1 - p - q) > 0.$$

Beweis von ii)

Modell ist Arbitragefrei, falls es ein zu P äquivalentes Maß P^* existiert, so dass die diskontierte Preise unter P^* Martingale sind.

Falls so ein Maß P^* existiert, dann soll gelten

$$5 = \frac{9}{10}\left(Xp^* + \frac{60}{9}q^* + \frac{40}{9}(1-p^*-q^*)\right) = \frac{9}{10}Xp^* + 2q^* + 4(1-p^*) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 10 = \frac{9}{10}\left(\frac{40}{3}p^* + \frac{80}{9}q^* + \frac{80}{9}(1-p^*-q^*)\right) &= 12p^* + 8(1-p^*) \\ &= 8 + 4p^* \end{aligned} \tag{2}$$

Aus der Gleichung (2) ergibt sich $p^* = \frac{1}{2} > 0$. Falls $X = 5$ (Aufgabe 4 ii)) ist, dann ergibt sich für q^* aus der Gleichung (1) $q^* = \frac{3}{8} > 0$ und somit

$$1 - p^* - q^* = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8} > 0$$

$\Longrightarrow$ es existiert tatsächlich ein zu P äquivalentes Martingal Maß P^*, d.h. das Modell ist arbitragefrei.

Beweis von i), Alternativlösung

Wir suchen ein P^*, so dass gilt

$$5 = \frac{9}{10} X p^* + 2q^* + 4(1 - p^*) \qquad (1)$$

$$10 = 8 + 4p^* \qquad (2)$$

Aus (2) folgt

$$p^* = \frac{1}{2}.$$

Falls $X = \frac{40}{9}$ ist, so folgt aus (1)

$$q^* = \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt

$$1 - p^* - q^* = 0,$$

d.h. es existiert kein äquivalentes Martingalmaß.

Zusatzaufgaben

Es sei $r = 0$. Berechnen Sie den Preis einer europ. Call-Option mit Basispreis 100 im folgenden 2-periodigen Modell.

$$
\begin{tikzcd}
 & & S_{uu} = 144 \\
 & S_u = 120 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S = 100 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_{ud} = S_{du} = 96 \\
 & S_d = 80 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_{dd} = 64
\end{tikzcd}
$$

Zusatzaufgaben

Kennzeichen Sie in der folgenden Tabelle durch ein „$+$“ bzw. „$-$“ Zeichen, ob nach Ihrer Auffassung der Wert der Optionen bei einer Zunahme der Einflußfaktoren zunimmt „$+$“ oder abnimmt „$-$“ .

Einflußfaktor	am. Call	euro. Call	am. Put	euro. Put
Aktienkurs S				
Basispreis K				
Optionsfrist T				
Volatilität σ				
Zinsniveau r				

Zusatzaufgabe

Definition 1.1

*Ein **Forward** ist ein Vertrag zwischen Vertragspartnern A und B, abgeschlossen "heute" zum Zeitpunkt t = 0, wonach zum Zeitpunkt T der Partner A eine bestimmte Menge eines Assets (heutiger Marktpreis S_0) liefert und B dafür den Preis F zahlt.*

Aufgabe (Zusatzaufgabe). Bestimmen Sie den Preis F unter der Annahme, dass das Asset innerhalb von $0 \leq t \leq T$ weder Kosten verursacht noch Erträge erzielt.