Übung zur Finanzmathematik II

Denis Boldin, Patrick Schlarmann

Universität Mannheim

Mannheim, Herbstsemester 2014

Bemerkung

Es seien

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

und

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

dann gilt

Hilfsgleichung

$$\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{S}{K} e^{r(T-t)}. \qquad (*)$$

Beweis

Es gilt

$$\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} e^{d_1 \sigma \sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} e^{\log \frac{S}{K} + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)}$$

$$= \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{S}{K} e^{r(T-t)}.$$

$\square$

Hilfsgleichung

$$\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{S}{K} e^{r(T-t)}. \qquad (*)$$

Aufgabe 1. Berechnen Sie für den Preis $c(S,t,K,T)$ einer europäischen Call-Option nach Black-Scholes die partielle Ableitung $\frac{\partial c}{\partial S}$. Ist c als Funktion von S monoton?

Beweis.
Für $c = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial S} &= N(d_1) + S\frac{\partial N(d_1)}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial N(d_2)}{\partial S} \\
&= N(d_{1)} + S\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\underbrace{\left(\frac{\partial d_1}{\partial S} - \frac{\partial d_2}{\partial S}\right)}_{=0} \\
&= N(d_1) \geq 0.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow c$ als Funktion von S monoton.

Aufgabe 2. Für die externe Zinsrate $r = 0$ zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial\, c}{\partial\, t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2\, c}{\partial S^2} = 0 \quad \text{für} \quad 0 < t < T,\ 0 < S < \infty,$$

dabei hat c dieselbe Bedeutung wie in Aufgabe 1.

Beweis.

Für $c = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$ und $r = 0$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= S\frac{\partial N(d_1)}{\partial t} - K\frac{\partial N(d_2)}{\partial t} = S\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\left(\frac{\partial d_1}{\partial t} - \frac{\partial d_2}{\partial t}\right)\\ &= S\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\left(\frac{\partial d_1}{\partial t} - \frac{\partial d_1}{\partial t} + \frac{\partial \sigma\sqrt{T-t}}{\partial t}\right)\\ &= -\frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}}\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}.\end{aligned}$$

Andererseits folgt mit Hilfe von Aufgabe 1

$$\frac{\partial^2\, c}{\partial S^2} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial S} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{\sigma S\sqrt{T-t}}\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}$$

und daraus die Behauptung. □

Aufgabe 3. Ist c als Funktion der Volatilität σ monoton wachsend? Berechnen Sie den Grenzwert von c für $\sigma \to 0$. Kommentieren Sie das Ergebnis!

Beweis.
Für $c = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial \sigma} &= S\frac{\partial N(d_1)}{\partial \sigma} - Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial N(d_2)}{\partial \sigma} = S\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\left(\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right) \\
&= S\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\left(\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma\sqrt{T-t}}{\partial \sigma}\right) \\
&= S\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\sqrt{T-t} \geq 0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ c ist als Funktion der Volatilität σ monoton wachsend.

Da $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ ist, weisen d_2 und d_1 gleiches Konvergenzverhalten für $\sigma \to 0$ auf. Somit reicht es aus nur d_1 zu untersuchen. Es gilt

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\log \frac{S}{K} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Falls σ gegen 0 strebt, strebt die Zählerfolge gegen $\log \frac{S}{K} + r(T-t)$ und die Nennerfolge gegen 0.

Die Quotientenfolge d_1 verhält sich somit wie folgt:

1. divergiert gegen $+\infty$ falls

$$\log \frac{S}{K} + r(T-t) > 0 \quad \text{bzw.} \quad S - Ke^{-r(T-t)} > 0.$$

2. divergiert gegen $-\infty$ falls

$$\log \frac{S}{K} + r(T-t) < 0 \quad \text{bzw.} \quad S - Ke^{-r(T-t)} < 0.$$

3. konvergiert gegen 0 falls

$$\log \frac{S}{K} + r(T-t) = 0 \quad \text{bzw.} \quad S - Ke^{-r(T-t)} = 0.$$

Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} N(k) = 1, \quad \lim_{k\to-\infty} N(k) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to 0} N(k) = \frac{1}{2}.$$

Somit folgt für den Call-Preis

$$\lim_{\sigma\to 0} c = \begin{cases} S - Ke^{-r(T-t)} & \text{falls} \quad S - Ke^{-r(T-t)} > 0 \\ 0 & \text{falls} \quad S - Ke^{-r(T-t)} < 0 \\ \frac{1}{2}\left(S - Ke^{-r(T-t)}\right) & \text{falls} \quad S - Ke^{-r(T-t)} = 0 \end{cases}$$

bzw.

$$\lim_{\sigma\to 0} c = \left(S - Ke^{-r(T-t)}\right)^{+}.$$

Interpretation

Falls σ gegen 0 geht, schwankt der Aktienkurs nicht und verhält sich somit wie eine risikolose Anlage. Das Auszahlungsprofil des Calls $(S_T - K)^+$ ist dann keine Zufallsvariable mehr, sondern eine bekannte Größe, deren Preis zur Zeit t dem Barwert $\left(S - Ke^{-r(T-t)}\right)^+$ entspricht.

Aufgabe 4. Ist c als Funktion von K konvex?

Beweis.
Für $c = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial K} &= S\frac{\partial N(d_1)}{\partial K} - Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial N(d_2)}{\partial K} - e^{-r(T-t)}N(d_2) \\
&= -e^{-r(T-t)}N(d_2) + S\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\underbrace{\left(\frac{\partial d_1}{\partial K} - \frac{\partial d_2}{\partial K}\right)}_{=0} \\
&= -e^{-r(T-t)}N(d_2).
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 c}{\partial K^2} &= -e^{-r(T-t)}\frac{\partial N(d_2)}{\partial K} = -e^{-r(T-t)}\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}\frac{\partial d_2}{\partial K} \\
&= -e^{-r(T-t)}\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}\frac{K}{\sigma S\sqrt{T-t}}\left(-\frac{S}{K^2}\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow c$ ist als Funktion von K konvex.