Übung zur Finanzmathematik II

Denis Boldin, Patrick Schlarmann

Universität Mannheim

Mannheim, Herbstsemester 2014

Bemerkung

In allen Aufgaben bezeichne D den Barwert der bekannten diskreten Dividendenzahlungen eines vorgegebenen Basispapiers innerhalb der Vertragslaufzeit der jeweils betrachteten Terminkontrakte.

$$D := \sum_{i=1}^{n} D_{t_i} B(t_i - t),$$

wobei D_{t_i} Dividendenzahlungen zu Dividendenterminen $t_1, \ldots, t_n$ innerhalb des Intervalls $[t, T]$ sind.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass falls für alle Ausschüttungstermine von Dividenden innerhalb des Intervalls $[t, T]$ die Relation

$$K(1 - B(T - t)) > D$$

gilt, dann stimmt der Preis eines Europäischen Calls auf das Basispapier mit dem Preis des entsprechenden Amerikanischen Calls überein.

Beweis

Nach dem Skript gilt

$$c(S, D, t, K, T) \geq \max\{S - KB(T-t) - D, 0\}$$

und weiter mit $K(1 - B(T-t)) > D$

$$C(S, t, D, K, T) \geq c(S, t, D, K, T) \geq S \underbrace{-KB(T-t) - D}_{>-K} > S - K$$

D.h. amerikanischer Call ist für $t < T$ immer größer als sein innerer Wert. Somit hat das zusätzliche Recht bei amerikanischer Call-Option, vorher zu kaufen, keinen Wert. $\square$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass für den Preis p einer Europäischen Put-Option eines Basispapiers mit Dividenden-Barwert D die Relation

$$p(S,t,D,K,T) \geq -S + D + KB(T-t)$$

gilt.

Beweis.
Wir zeigen zunächst folgende Behauptung.

Behauptung 1.1 (Put-Call Parität)

Sei S ein dividendenzahlendes Basispapier und D der Dividenden- Barwert, dann gilt

$$p(S,t,D,K,T) + S = c(S,t,D,K,T) + KB(T-t) + D$$

Beweis

Dazu betrachten wir zwei Portfolios:

A : Put-Option $p(S,t,D,K,T)$, Basispapier S.

Gesamtwert : $V_A(t) = p + S$

B : Call-Option $c(S,t,D,K,T)$, $K + \frac{D}{B(T-t)}$ Zerobonds zum Preis $B(T-t)$.

Gesamtwert: $V_B(t) = c + KB(T-t) + D$

Zum Zeitpunkt T gilt

	$S_T \leq K$	$S_T > K$
$V_A(T)$	$K + \frac{D}{B(T-t)}$	$S_T + \frac{D}{B(T-t)}$
$V_B(T)$	$K + \frac{D}{B(T-t)}$	$S_T + \frac{D}{B(T-t)}$

Aus $V_A(T) = V_B(T)$ folgt mit dem Dominanzprinzip $V_A(t) = V_B(t)$ und somit die Behauptung 1.1. Daraus und mit $c \geq 0$ folgt die Behauptung der Aufgabe 2. $\square$

Aufgabe 3. Prüfen Sie, ob die entsprechende Ungleichung von Aufgabe 2 auch für Amerikanische Put-Optionen gilt? D.h. ob die Ungleichung

$$P(S,t,D,K,T) \geq -S + D + KB(T-t)$$

gilt.

Beweis.

Da amerikanische Optionen mindestens so viel Wert wie europäische Optionen sind, gilt die entsprechende Ungleichung auch für amerikanische Put-Optionen. Es gilt sogar schärfer

$$P(S,t,D,K,T) \geq \max\{0\,, K-S\,, -S+D+KB(T-t)\}$$

□

Aufgabe 4. Begründen Sie folgende Put-Call-Relation für Amerikanische Optionen auf ein Basispapier mit Dividenden-Barwert D:

$$\begin{aligned} C(S,t,D,K,T) + K + D - S &\geq P(S,t,D,K,T) \\ &\geq C(S,t,D,K,T) + KB(T-t) - S \end{aligned}$$

Zu zeigen: $P(S,t,D,K,T) \geq C(S,t,D,K,T) + KB(T-t) - S$

Beweis.

Rechte Seite. Angenommen es gilt

$$C^A(t) - P^A(t) + KB(T-t) - S > 0$$

Dann kaufe in t eine Put-Option, eine Aktie und verkaufe einen Call und K Zerobonds.

Falls der Käufer der Call-Option diese zur Zeit $t^* \leq T$ ausübt, tausche die Aktie gegen den Geldbetrag K ein und schließe damit die Short-Position in Zerobonds.

Übrig bleibt:

$$\frac{D^*}{B(t^*-t)} + K\left(1 - B(T-t^*)\right) + P^A(t^*) \geq 0$$

Zu zeigen: $P(S,t,D,K,T) \geq C(S,t,D,K,T) + KB(T-t) - S$

Falls der Käufer der Call-Option diese nie ausübt (auch nicht zur Zeit T), schließe die Short-Position in Zerobonds mit Put und Aktie.

Übrig bleibt: $D/B(T-t) \geq 0$ $\quad\Rightarrow$ Arbitrage.

$C(S,t,D,K,T) + K + D - S \geq P(S,t,D,K,T)$

Linke Seite. Angenommen es gilt

$$0 < -C(S,t,D,K,T) - K - D + S + P(S,t,D,K,T)$$

Portfolio: Aktie short, Put short, Call long, $\frac{K+D}{B(T-t)}$ Zerobonds long.

Falls die amerikanische Put-Option zur Zeit $t^* \leq T$ ausgeübt wird, zahle K für die Aktie, schließe damit Short in Aktie und schließe Short in Dividenden.

Übrig bleibt:

$$C_A(t^*) + K\left(\frac{1}{B(t^*-t)} - 1\right) + \frac{D - D^*}{B(t^*-t)} \geq 0$$

Falls der Käufer der Put-Option diese nie ausübt, schließe Short in Aktie mit Hilfe von Call und K Zerobonds, schließe Short-Position in Dividenden.

Übrig bleibt: $\left(\frac{1}{B(T-t)} - 1\right) K \geq 0 \quad \Rightarrow$ Arbitrage. $\square$

Satz 2.13

$$c(S, D, t, K, T) \geq \max\{S - KB(T-t) - D, 0\}$$

Beweis.

In Aufgabe 2 hatten wir die folgende Put-Call-Parität nachgewiesen:

Behauptung 2.1 (Put-Call Parität)

Sei S ein dividendenzahlendes Basispapier und D der Dividenden- Barwert, dann gilt

$$p(S, t, D, K, T) + S = c(S, t, D, K, T) + KB(T-t) + D$$

Gleichungsumformung ergibt:

$$c(S, t, D, K, T) - \underbrace{p(S, t, D, K, T)}_{\geq 0} = S - KB(T-t) - D$$

und somit:

$$c(S, t, D, K, T) \geq S - KB(T-t) - D$$