Übung zur Finanzmathematik II

Denis Boldin, Patrick Schlarmann

Universität Mannheim

Mannheim, Herbstsemester 2014

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Ein Vermögensanleger kann in zwei Wertpapiere investieren. Die Wertpapiere sind durch folgende Daten gekennzeichnet:

	erwartete Rendite	Standardabweichung
Wertpapier 1	7.28 %	5.47 %
Wertpapier 2	5.75 %	6.58 %

Die Wertpapiererträge sind hoch korreliert ($\rho = 0.9654$).

A) Berechnen Sie das Portfolio mit minimalem Risiko, das sich aus den beiden Wertpapieren zusammenstellen lässt (Leerverkäufe sind dabei zugelassen).

B) Was ist die erwartete Rendite bzw. die Standardabweichung dieses Portfolios?

Beweis

Es gilt $\Pi := (\alpha_1, \alpha_2)$ und

$$R(\Pi) = \alpha_1 R(X_1) + \alpha_2 R(X_2), \quad \text{mit} \;\; \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Gesucht ist die Lösung des folgendes Minimierungsproblems

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[R(\Pi)] &\longrightarrow \min, \\ \text{NB: } \alpha_1 + \alpha_2 &= 1. \end{aligned}$$

Die Varianz der Rendite des Portfolios Π ist

$$\begin{aligned}
\underbrace{\mathrm{Var}[R(\Pi)]}_{:=\sigma_\Pi^2} &= \mathbb{E}\left[\Big(\alpha_1 R(X_1) + \alpha_2 R(X_2) - \alpha_1 \mathbb{E}[R(X_1)] - \alpha_2 \mathbb{E}[R(X_2)]\Big)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\alpha_1 R(X_1) - \alpha_1 \mathbb{E}[R(X_1)]\Big)^2 + \Big(\alpha_2 R(X_2) - \alpha_2 \mathbb{E}[R(X_2)]\Big)^2 \\
&\qquad + 2\alpha_1\alpha_2 \Big(R(X_1) - \mathbb{E}[R(X_1)]\Big)\Big(R(X_2) - \mathbb{E}[R(X_2)]\Big)\Big] \\
&= \alpha_1^2 \underbrace{\mathrm{Var}[R(X_1)]}_{:=\sigma_1^2} + \alpha_2^2 \underbrace{\mathrm{Var}[R(X_2)]}_{:=\sigma_2^2} + 2\alpha_1\alpha_2 \underbrace{\mathrm{Cov}[X_1, X_2]}_{=\rho\sigma_1\sigma_2}
\end{aligned}$$

Beweis

Das Minimierungsproblem ist somit

$$\begin{aligned}\sigma_\Pi^2 = \alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\rho\sigma_1\sigma_2 \longrightarrow \min,\\ \text{NB: } \alpha_1 + \alpha_2 = 1.\end{aligned}$$

bzw.

$$\sigma_\Pi^2 = \alpha_1^2\sigma_1^2 + (1-\alpha_1)^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1(1-\alpha_1)\rho\sigma_1\sigma_2 \longrightarrow \min\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_\Pi^2}{d\alpha_1} &= 2\alpha_1\sigma_1^2 - 2(1-\alpha_1)\sigma_2^2 + 2(1-\alpha_1)\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\alpha_1\rho\sigma_1\sigma_2 \overset{!}{=} 0\\ &\Rightarrow \alpha_1 = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \frac{\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}\end{aligned}$$

Beweis

Es folgt somit

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (2.2964, -1.2964)$$

und für die erwartete Rendite bzw. Standardabweichung dieses Portfolios

$$\mu_\Pi = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 = 0.0926,$$

bzw.

$$\sigma_\Pi = \sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\rho\sigma_1\sigma_2} = 0.0486.$$

$\square$

Übungsblatt 1

Aufgabe 2. Beweisen Sie die in der Vorlesung benutzte Tatsache, dass für eine positiv definite symmetrische quadratische Matrix die Inverse wieder positiv definit und symmetrisch ist.

Beweis.

Zur Symmetrie:

$$E = A \cdot A^{-1} = \left(A \cdot A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T \cdot A^T = \left(A^{-1}\right)^T \cdot A$$

Die Multiplikation auf beiden Seiten mit A^{-1} von rechts liefert die Behauptung.

$$A^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

Beweis

Zur Positiv Definitheit:

Satz 1.1

A invertierbar, dann existiert zu jedem $y \in \mathbb{R}^n$ ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = y$.

Definition 1.2

Matrix A heißt positiv definit, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ gilt $x^T Ax > 0$.

Sei $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$, dann gilt

$$y^T A^{-1} y = (Ax)^T A^{-1} Ax = x^T Ax > 0.$$

$\square$

Aufgabe 3. Warum hat das in der Vorlesung mittels Lagrangescher Multiplikatoren berechnete Portfolio X minimale und nicht maximale Varianz?

Beweis.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\sigma^2(e) = \frac{ae^2 - 2be + c}{d}$$

daraus folgt

$$\frac{d\sigma^2}{de} = \frac{2ae - 2b}{d} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad e = \frac{b}{a}$$

$$\frac{d^2\sigma^2}{de^2} = \frac{2a}{d} > 0, \quad \text{da} \;\; a, d > 0.$$

D.h. die Funktion σ^2 hat in $\frac{b}{a}$ ihr Minimum. $\square$

Alternative Lösung zur Aufgabe 3 vom Blatt 1

Aufgabe 3.

Behauptung

Das Portfolio X^e definiert durch

$$X^e = \frac{c - be}{d} \Sigma^{-1} \underline{1} + \frac{ae - b}{d} \Sigma^{-1} \mu$$

hat minimale Varianz.

Beweis.

Es sei $X^e + h$, $h \neq 0$ ein anderes Portfolio, das die Nebenbedingungen

$$X \cdot \underline{1} = 1 \quad \text{und} \quad X \cdot \mu = e$$

erfüllt. Dann folgt aus

$$(X^e + h) \cdot \underline{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad h \cdot \underline{1} = 0$$

und aus

$$(X^e + h) \cdot \mu = e \quad \Rightarrow \quad h \cdot \mu = 0$$

Beweis

Weiter gilt für die Varianz der Rendite dieses Portfolios

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[R(X^e+h)\right] &= \left(X^e+h\right)^T \Sigma \left(X^e+h\right) \\
&= (X^e)^T \Sigma X^e + \underbrace{h^T \Sigma h}_{>0} + 2h^T \Sigma X^e \\
&> (X^e)^T \Sigma X^e + 2h^T \Sigma \left(\frac{c-be}{d} \Sigma^{-1} \underline{1} + \frac{ae-b}{d} \Sigma^{-1} \mu \right) \\
&= (X^e)^T \Sigma X^e + \underbrace{2\frac{c-be}{d} h^T \cdot \underline{1} + 2\frac{ae-b}{d} h^T \cdot \mu}_{=0} \\
&= (X^e)^T \Sigma X^e = \mathrm{Var}\left[R(X^e)\right].
\end{aligned}$$

□

Übungsblatt 1

Aufgabe 4. Heute, am 21.10.2014 steht der Kurs der XYZ-Aktie auf dem Wert von 100 €. Am 6.11.2014 sind Präsidentschaftswahlen, und abhängig davon, welcher der beiden Kandidaten gewählt wird, falle bzw. steige nach Ihrer Einschätzung der Kurs der XYZ-Aktie um 10 % innerhalb eines Vierteljahres. Dabei wird davon ausgegangen, dass nur diese zwei Szenarien auftreten. Es gebe Amerikanische Call und Put Optionen für XYZ-Aktien mit Verfallsdaten 31.12.14., 31.01.15, 28.02.15 und 30.03.15 und Ausübungspreisen 95, 100 und 105. Konstruieren Sie ein Options-Portfolio mit maximal 200 der genannten Optionen, das im Falle einer richtigen Einschätzung der zu erwartenden Kursbewegungen in beiden Fällen am 30.03.2015 mindestens den Ertrag von 1500 € liefert (hierbei wird allerdings – nicht ganz korrekt und nur für die Aufgabe geeignet – der Preis der Optionen zum Kaufzeitpunkt nicht berücksichtigt).

ZUSATZAUFGABEN

Aufgabe 1. Sei X Zufallsvariable mit folgender Verteilung

$$X = \begin{cases} S & \text{mit W-keit} \quad q \\ 0 & \text{mit W-keit} \quad p \end{cases}$$

Berechnen Sie mittels momenterzeugender Funktion $\varphi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{uX}\right]$ den Erwartungswert $\mathbb{E}\left[X\right]$ und die Varianz $\mathrm{Var}\left[X\right]$ von X.

Aufgabe 2. Berechnen Sie

$$\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}\right)}{\partial X_i}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Rendite des Portfolios $X = (X_1, \ldots, X_N)$

$$R(X) = \sum_{i=1}^{N} R_i X_i \quad \text{mit} \quad R_i = \frac{S_i(T)}{S_i}$$

wohldefiniert ist. Dazu berechnen Sie

$$R(X) := \frac{V_T}{V_0} \quad \text{mit } V_0 \text{ bzw. } V_T \text{ Anfangs- bzw. Endvermögen.}$$