# Maßwechsel

Denis Boldin

Universität Mannheim

Mannheim, Herbstsemester 2014

## Wo wird Masswechsel verwendet?

- Simulation seltener Ereignisse
- Berechnung von Erwartungswerten kann durch einen Maßwechsel vereinfacht werden
- Preisbestimmung von Derivaten

## Vorbemerkung 2.1

Wir notieren für die Zukunft:

Falls $X \sim N(m, \sigma^2)$-verteilt, dann gilt

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X}) = e^{\lambda m + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}}$$

## Satz 2.2

*Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $Z$ *eine fast sicher nicht negative Zufallsvariable mit* $\mathbb{E}(Z) = 1$. *Dann ist*

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega), \quad \text{für jedes } A \in \mathcal{F} \tag{1}$$

*ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Sei weiter* $X$ *eine nicht negative Zufallsvariable, dann gilt*

$$\widetilde{\mathbb{E}}(X) = \mathbb{E}(XZ). \tag{2}$$

*Falls* $Z > 0$ *fast sicher ist, dann gilt*

$$\mathbb{E}(X) = \widetilde{\mathbb{E}}(\frac{X}{Z}) \tag{3}$$

Beweis von (1):

E1

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) = \int_\Omega Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}(Z) = 1.$$

E2 Sei $A_1, A_2, \dots$ eine Folge von disjunkten Teilmengen von $\mathcal{F}$. Wir setzten $B_1 = A_1$, $B_2 = A_1 \cup A_2, \dots, B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ und $B_\infty = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ dann gilt

$$\mathbb{1}_{B_1} \leq \mathbb{1}_{B_2} \leq \mathbb{1}_{B_3} \leq \dots \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{B_n} = \mathbb{1}_{B_\infty}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{P}}(B_\infty) &= \int_\Omega \mathbb{1}_{B_\infty}(\omega) Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{B_n}(\omega) Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \mathbb{1}_{A_i}(\omega) Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \sum_{i=1}^\infty \widetilde{\mathbb{P}}(A_i)\end{aligned}$$

$\square$

### Definition 2.3

*Zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}$ und $\widetilde{\mathbb{P}}$ auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$ heißen äquivalent (geschrieben $\mathbb{P} \sim \widetilde{\mathbb{P}}$) , falls*

$$\mathbb{P}(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{\mathbb{P}}(A) = 0 \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{F}, \tag{4}$$

*gilt, d.h. $\mathbb{P}$ und $\widetilde{\mathbb{P}}$ besitzen die gleichen Nullmengen.*

### Satz 2.4 (Radon-Nikodým)

*Seien $\mathbb{P}$ und $\widetilde{\mathbb{P}}$ zwei äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$, dann existiert eine postitive Zufallsvariable $Z$, so dass $\mathbb{E}(Z) = 1$ und*

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{F}$$

*gilt. Die Zufallsvariable $Z$ heißt Radon-Nikodým Ableitung von $\widetilde{\mathbb{P}}$ bzgl. $\mathbb{P}$ und wird als $Z = \frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}$ bezeichnet.*

Beispiel:

Seien $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}$, $\widetilde{\mathbb{P}}$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße mit

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(\omega_2) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{8},\ \mathbb{P}(\omega_4) = \frac{1}{8},$$
$$\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_1) = \frac{1}{4},\ \widetilde{\mathbb{P}}(\omega_2) = \frac{1}{5},\ \widetilde{\mathbb{P}}(\omega_3) = \frac{1}{4},\ \widetilde{\mathbb{P}}(\omega_4) = \frac{3}{10}.$$

Dann sind $\mathbb{P}$ und $\widetilde{\mathbb{P}}$ gemäß Definition 2.3 äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße. Wir definieren

$$Z(\omega_i) = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_i)}{\mathbb{P}(\omega_i)} \quad \text{für} \quad i \in \{1, 2, 3, 4\},$$

d.h. $Z(\omega_1) = \frac{1}{2}$, $Z(\omega_2) = \frac{4}{5}$, $Z(\omega_3) = 2$, $Z(\omega_4) = \frac{12}{5}$. Es gilt $Z > 0$ und

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^{4} Z(\omega_i)\mathbb{P}(\omega_i) = 1.$$

Wir hätten also das W-Maß $\widetilde{\mathbb{P}}$ wie folgt definieren können

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \sum_{\omega \in A} Z(\omega)\mathbb{P}(\omega) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{F}.$$

## Weiteres Beispiel

Beispiel:

Es sei $X$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, d.h. es gilt

$$\mathbb{P}(X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \text{für jedes} \quad b \in \mathbb{R}$$

Außerdem gilt $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 1$.

Sei $\mu \in \mathbb{R}$ eine Konstante und $Y = X + \mu$ eine weitere Zufallsvariable. Unter dem W-Maß $\mathbb{P}$ ist $Y$ normalverteilt mit $\mathbb{E}(Y) = \mu$ und $\mathrm{Var}(Y) = 1$.

Unser Ziel:

Zu einem neuen Maß $\widetilde{\mathbb{P}}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ überzugehen, unter welchem $Y$ eine Standardnormalverteilte Zufallsvariable ist, d.h. $\widetilde{\mathbb{E}}(Y) = 0$, $\widetilde{\mathrm{Var}}(Y) = 1$.

## Beispiel Fortsetzung

Wir fassen nochmal zusammen:

$$\mathbb{P}(Y \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}} \, dy$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}(Y \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy$$

$$e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}} = e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mu^2 + y\mu}$$

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}(\omega) = Z(\omega) = ?!$$

$$Z(\omega) = e^{\frac{1}{2}\mu^2 - Y(\omega)\mu}$$

## Beispiel Fortsetzung

i) $Z(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$.

ii)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \int_\Omega Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_\Omega e^{\frac{1}{2}\mu^2 - Y(\omega)\mu}\, d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}\mu^2 - y\mu} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\ &= 1.\end{aligned}$$

Wir können also die Zufallsvariable $Z$ für die Definition des W-Maßes $\widetilde{\mathbb{P}}$ heranziehen

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{F}$$

## Beispiel Fortsetzung

Zu zeigen ist noch, dass $Y$ unter $\widetilde{\mathbb{P}}$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{P}}(Y \leq b) &= \int_{\{\omega : Y(\omega) \leq b\}} Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{Y(\omega) \leq b\}} Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{Y(\omega) \leq b\}} e^{\frac{1}{2}\mu^2 - Y(\omega)\mu}\, d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\{y \leq b\}} e^{\frac{1}{2}\mu^2 - y\mu} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}\, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy
\end{aligned}$$

## Weiteres Beispiel (Simulation seltener Ereignisse)

Beispiel: Sei $X \sim N(6,1)$ unter dem W-maß $P$. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit $P(X<0)$ mittels Monte-Carlo Simulation berechnen. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt etwa $10^{-10}$. Direkte Simulation ergibt

$$P(X<0) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X<0\}}\right] \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i<0\}}, \quad \text{mit } X_i \sim N(6,1).$$

Für $n = 10^6$ ist der erwartete Schätzer gleich $0$. Sei $X \sim N(0,1)$ unter dem neuen Maß $\widetilde{P}$, dann gilt

$$P(A) = \int_A Z(\omega)\, d\widetilde{P}(\omega) \quad \text{mit} \quad Z(\omega) = e^{6X(\omega)-18}.$$

Damit folgt

$$P(X<0) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{6X-18}\mathbb{1}_{\{X<0\}}\right] \approx e^{-12}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{6(X_i-1)}\mathbb{1}_{\{X_i<0\}},$$

wobei $X_i \sim N(0,1)$. Etwa die Hälfte der $X_i$ werden negativ sein. Somit werden wir für kleine $n$ besseren Schätzer haben.

## Weiteres Beispiel (Erwartungswertberechnung)

Beispiel:

Es sei $X \sim N(\mu, 1)$-verteilt unter dem Maß $\mathbb{P}$. Wir wollen $\mathbb{E}(e^X \mathbb{1}_{\{X>a\}})$ berechnen.

Dazu definieren wir $\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}(X) = Z(X) = \frac{e^X}{\mathbb{E}(e^X)} = e^{X-\mu-\frac{1}{2}}$, dann folgt $Z > 0$, $\mathbb{E}(Z) = 1$ und $\mathbb{P} \sim \widetilde{\mathbb{P}}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^X \mathbb{1}_{\{X>a\}}) &= e^{\mu+\frac{1}{2}} \mathbb{E}(Z\, \mathbb{1}_{\{X>a\}}) \\ &= e^{\mu+\frac{1}{2}} \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbb{1}_{\{X>a\}}) = e^{\mu+\frac{1}{2}} \widetilde{\mathbb{P}}(X > a).\end{aligned}$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}(e^{uX}) = \mathbb{E}(Z\, e^{uX}) = e^{-\mu-\frac{1}{2}} \mathbb{E}(e^{(u+1)X}) = e^{u(\mu+1)+\frac{u^2}{2}}$$

d.h. $X \sim N((\mu+1), 1)$ unter $\widetilde{\mathbb{P}}$, daraus folgt

$$\mathbb{E}(e^X \mathbb{1}_{\{X>a\}}) = e^{\mu+\frac{1}{2}} \widetilde{\mathbb{P}}(X > a) = e^{\mu+\frac{1}{2}} (1 - \Phi(a - \mu - 1)),$$

wobei $\Phi$ die Verteilungsfunktion der Standard-Normal-Verteilung ist.

## Radon-Nykodým Dichteprozess

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F}(t)$ eine Filtration, die für $0 \leq t \leq T$ definiert ist. Weiter sei $Z$ eine positive Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(Z) = 1$ und

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{F}.$$

Wir definieren einen Radon-Nykodým Dichteprozess durch

$$Z(t) = \mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}(t)) \quad 0 \leq t \leq T \tag{5}$$

Es folgt für $0 \leq s \leq t \leq T$ :

$$\mathbb{E}(Z(t) \mid \mathcal{F}(s)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}(t)) \mid \mathcal{F}(s)) = \mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}(s)) = Z(s)$$

d.h. der in (5) definierte Prozess $Z(t)$ ist ein Martingal.

**LEMMA 3.1**

*Seien $0 \leq t \leq T$ und $Y$ eine $\mathcal{F}(t)$ messbare Zufallsvariable, dann gilt*

$$\widetilde{\mathbb{E}}(Y) = \mathbb{E}(YZ(t)) \tag{6}$$

Beweis.

$$\widetilde{\mathbb{E}}(Y) = \mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(YZ \mid \mathcal{F}(t)) = \mathbb{E}(Y\mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}(t)) = \mathbb{E}(YZ(t))$$

□

**LEMMA 3.2**

*Sei $Y$ eine $\mathcal{F}(t)$ messbare Zufallsvariable, dann gilt für alle $0 \leq s \leq t \leq T$*

$$\widetilde{\mathbb{E}}(Y \mid \mathcal{F}(s)) = \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}(YZ(t) \mid \mathcal{F}(s)) \tag{7}$$

## Bedingter Erwartungswert

### Erinnerung 3.3

Sei $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-$\sigma$-Algerbra. Eine Zufallsvariable $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt *ein bedingter Erwartungswert von $X$ gegeben $\mathcal{G}$*, wenn gilt:

(I) $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ ist $\mathcal{G}$-messbar

(II) Für alle $A \in \mathcal{G}$ gilt die Mittelwerteigenschaft

$$\int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \, d\mathbb{P} = \int_A X \, d\mathbb{P}$$

Beweis.

Die $\mathcal{F}(s)$-Messbarkeit von $\frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}(YZ(t) \mid \mathcal{F}(s))$ ist klar. Wir prüfen die Mittelwerteigenschaft nach, d.h.

$$\int_A \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}(YZ(t) \mid \mathcal{F}(s))\, d\widetilde{\mathbb{P}} = \int_A Y\, d\widetilde{\mathbb{P}} \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{F}(s)$$

Wir betrachten die linke Seite:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}\left[\mathbb{1}_A \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}(YZ(t) \mid \mathcal{F}(s))\right] &= \mathbb{E}\left[\,\mathbb{1}_A\, \mathbb{E}(YZ(t) \mid \mathcal{F}(s))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_A\, YZ(t) \mid \mathcal{F}(s))\right] \\
&= \mathbb{E}\left(\,\mathbb{1}_A\, YZ(t)\right) \\
&= \widetilde{\mathbb{E}}\left(\,\mathbb{1}_A\, Y\right) \\
&= \int_A Y\, d\widetilde{\mathbb{P}}
\end{aligned}$$

□

## Satz von Girsanov

### Satz 3.4 (Girsanov, eine Dimension)

*Seien $W(t)$, $0 \leq t \leq T$ eine $\mathcal{F}(t)$-adaptierte Brownsche Bewegung und $\Theta(t)$ ein $\mathcal{F}(t)$-adaptierter Prozess auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Weiter seien*

$$Z(t) = \exp\left( - \int_0^t \Theta(u)\, dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta^2(u)\, du \right), \tag{8}$$

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(u)\, du \tag{9}$$

*und*

$$\mathbb{E}(\int_0^t \Theta^2(u) Z^2(u)\, du) < \infty. \tag{10}$$

*Setze $Z = Z(T)$, dann gilt $\mathbb{E}(Z) = 1$ und der Prozess $\widetilde{W}(t)$, $0 \leq t \leq T$ ist eine Brownsche Bewegung unter dem äquivalenten Maß $\widetilde{\mathbb{P}}$.*

Beweis.

Beim Beweis verwenden wir die Levy's Charakterisierung der Brownschen Bewegung als ein stetiges Martingal mit quadratischer Variation $t$ für jedes $t \geq 0$.
Es gilt

$$d\widetilde{W}(t)d\widetilde{W}(t) = (dW(t) + \Theta(t)\,dt)^2 = dW(t)\,dW(t) = dt$$

und es bleibt somit zu zeigen, dass $\widetilde{W}(t)$ ein Martingal unter dem Maß $\widetilde{\mathbb{P}}$ ist. Wir zeigen zuerst, dass $Z(t)$ ein Martingal unter dem Maß $\mathbb{P}$ ist. Dazu setzen wir

$$X(t) = -\int_0^t \Theta(u)\,dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta^2(u)\,du.$$

Mit Ito-Doeblin Formel und $f(x) = e^x$ folgt dann

$$\begin{aligned} dZ(t) &= d(f(X(t)) \\ &= f'(X(t))\,dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))\,dX(t)\,dX(t) \\ &= e^{X(t)}\left(-\Theta(t)dW(t) - \frac{1}{2}\Theta^2(t)dt\right) + \frac{1}{2}e^{X(t)}\Theta^2(t)\,dt \\ &= -\Theta(t)Z(t)\,dW(t) \end{aligned}$$

Integration auf beiden Seiten liefert

$$Z(t) = Z(0) - \int_0^t \Theta(u)Z(u)\,dW(u).$$

Als Ito-Integral ist $Z(t)$ ein Martingal. Insbesondere gilt

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Z(T)) = Z(0) = 1.$$

Als Nächstes zeigen wir, dass $\widetilde{W}(t)Z(t)$ ein Martingal unter dem Maß $\mathbb{P}$ ist. Nach Ito-Produkt-Formel gilt

$$\begin{aligned} d(\widetilde{W}(t)Z(t)) &= \widetilde{W}(t)\,dZ(t) + Z(t)\,d\widetilde{W}(t) + d\widetilde{W}(t)\,dZ(t) \\ &= -\widetilde{W}(t)\Theta(t)Z(t)\,dW(t) + Z(t)\,dW(t) + Z(t)\Theta(t)dt \\ &\quad + (dW(t) + \Theta(t)\,dt)(-\Theta(t)Z(t)\,dW(t)) \\ &= (-\widetilde{W}(t)\Theta(t) + 1)Z(t)\,dW(t) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\widetilde{W}(t)Z(t)$ ein Martingal ist.

Zuletzt gilt für alle $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{E}}(\widetilde{W}(t) \mid \mathcal{F}(s)) &= \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}(\widetilde{W}(t)Z(t) \mid \mathcal{F}(s)) \\ &= \frac{1}{Z(s)}\widetilde{W}(s)Z(s) \\ &= \widetilde{W}(s) \end{aligned}$$

$\square$

# LITERATUR