UNIVERSITÄT MANNHEIM
Institut für Mathematik
Prof. Dr. H.-J. Bartels

Übungen zur Finanz- und Versicherungsmathematik I
Frühjahrssemester 2015

Blatt 7

Aufgabe 1 (doppelte Wertung): Man beweise für die in der Vorlesung nur flüchtig behandelte Funktional-Differentialgleichung u(2z)-2u(z) u'(z)-au^2 (z)=0 mit den Anfangsbedingungen u(0) = 0, u'(0)=1, u''(0)= - a folgende Aussagen für a=0:

(i) Bei einem Lösungsansatz mit Potenzreihen $u(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ ergibt sich die folgende Rekursion

$$(2^{n-1}\text{-n-1})a_n = \sum_{k=1}^{n-2}(k+1)a_{k+1}a_{n-k} \qquad , \quad n>2 \quad \text{zur Bestimmung der Koeffizienten ;}$$

(ii) Für beliebiges aber festes a_3 sind sämtliche a_k für k >3 eindeutig bestimmt ;
Durch Vorgabe des dritten Koeffizienten aus der Rekursion (i) sind sämtliche weiteren Koeffizienten eindeutig bestimmt;

(iii) Die sich für u ergebenden Potenzreihen sind $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, wenn man c:= 3! a_3 setzt;

(iv) Die gefundenen Potenzreihen konvergieren für alle reellen x und lösen für a=0 das vorgegebene Anfangswertproblem (Hinweis: Man benutze die Identität $\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n+1)!}{(2k+1)!(2(n-k))!}=2^{2n}$.)

Aufgabe 2: Man berechne den Mittelwert und die Varianz der Verteilung mit der Dichte $f(x)=a\,e^{-ax}$ für x≥ 0 , f(x) = 0 für x<0
(i) direkt,
(ii) mittels der momenterzeugenden Funktion ,
(iii) mittels der charakteristischen Funktion .
Hierbei werde a>0 vorausgesetzt.

Aufgabe 3: Sei g>0 und X eine Zufallsvariable mit X = S mit Wahrscheinlichkeit q und S>0 bzw. X = 0 mit Wahrscheinlichkeit p=1-q. Dann existiert ein $\tau>0$ derart, daß für 0 < t < τ gilt:

$$E(e^{tX})>e^{gt^2/2}.$$

Aufgabe 4 : Mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung beweise man:
Sind X$_1$,...,X$_n$ unabhängige Zufallsvariable mit gleichem Erwartungswert und Var(X$_i$)≤M<∞ , dann gilt für alle ε>0 $\lim_{n\to\infty}$ P($\left|\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)-EX_1\right|\geq\varepsilon$) = 0

Abgabetermin: Montag, d. 20.4.2015 10.05 Uhr.