UNIVERSITÄT MANNHEIM
Institut für Mathematik
Prof. Dr. H.-J. Bartels

Übungen zur Analysis III , HS 2013

Blatt 11

Aufgabe 1: Die Funktionen f,g und die Vektorfelder a, b seien in einem Gebiet des R^3 definiert und differenzierbar. Man drücke grad (fg), div (fa) , rot (fa), div (a$\times$b) durch grad f , grad g , div a , div b , rot a und rot b aus *(4 Punkte)* .

Aufgabe 2: B^p bezeichne die Menge aller stetig differenzierbaren Differentialformen vom Grade p auf der offenen Menge M $\subseteq R^n$, die die Form $d\sigma$ mit einer geeigneten Differentialform σ vom Grade p-1 auf M haben, dabei setze man B^0 = 0 . Ferner sei Z^p die Menge aller stetig differenzierbaren geschlossenen Differentialformen vom Grad p auf M.
B^p und Z^p sind reelle Vektorräume mit $B^p \subseteq Z^p$ .Berechne die Faktorvektorräume $H^p := Z^p / B^p$ für alle p$\geq$0 , wenn M das Innere der Einheitskugel im R^n ist *(3 Punkte).*

.

Aufgabe 3: Welche der folgenden Differentialformen liegen in B^p , welche in Z^p (dabei sei M= $R^2 - \{0\}$, bzw. = $R^3 - \{0\}$) :

(i) $(x^2+y^2)^{-1}(xdx+ydy)$; (ii) $(x^2+y^2)^{-1}(xdx-ydy)$;

(iii) $\frac{x}{x^2+y^2+z^2}dx\Lambda dy + (y - \frac{z}{x^2+y^2+z^2})dy\Lambda dz + xdx\Lambda dz$;

(iv) $(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(zdx\Lambda dy + xdy\Lambda dz + ydz\Lambda dx)$ *(6 Punkte).*

Aufgabe 4: Für $k = 2^n + m$ mit $0 \leq m \leq 2^n - 1$, n=0,1,2,... sei die Funktionenfolge $f_k : [0,1] \to R$ definiert durch $f_k(x) := 1$ für $\frac{m}{2^n} \leq x \leq \frac{m+1}{2^n}$ und $f_k(x) := 0$ sonst .

(i) Man zeige: $\int_0^1 |f_i(x) - f_j(x)| dx \to 0$ für $i, j \to \infty$;

(ii) Für welche $x \in [0,1]$ konvergiert die Punktfolge $(f_k(x))$? *(4 Punkte).*

.

Man bearbeite 2 bis 4 Aufgaben!

Abgabetermin: Mittwoch, d. 27.11.2013 10.00 Uhr.