Tutorium Analysis II FSS 2009: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

zusammengestellt von Markus Huggenberger

Vorlesung von
Prof. Dr. H. J. Bartels
Universität Mannheim

24. Mai 2009

Agenda

Outline

Anfoderungen an das Mengensystem $\mathfrak{M}$

In der Vorlesung wurden die Anforderungen an das Maß m und ein geeignetes Mengensystem $\mathfrak{M}$ gemeinsam formuliert. An dieser Stelle sollen die Eigenschaften der Objekte zunächst getrennt betrachtet werden:

Sei dazu $\mathfrak{M}$ eine Menge von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, d.h. $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Diese Menge (von Mengen) soll die folgenden Stabilitätseigenschaften aufweisen:

(M1-1) $A, B \in \mathfrak{M} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathfrak{M}$ (vereinigungsstabil)

(M1-2) $A, B \in \mathfrak{M} \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \mathfrak{M}$ (durchschnittsstabil)

(M1-3) $A, B \in \mathfrak{M} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in \mathfrak{M}$ (differenzstabil)

Diese Eigenschaften werden in der Vorlesung zu (M1) zusammengefasst.

Inhalt

Definition (Inhalt)

Sei $\mathfrak{M}$ eine Menge von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die (M1) erfüllt. Eine Mengenfunktion $m : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, die

$$A \cap B = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad m(A \cup B) = m(A) + m(B) \qquad \text{(M2)}$$

erfüllt, heißt *Inhalt*.

Eine wesentliche Forderung wird durch den Bildbereich der Abbildung gegeben, nämlich das Inhalte eine *nicht negative* numerische Funktionen sind. Oft wird bei der Definition des Inhaltsbegriffs zusätzlich gefordert, dass $m(\emptyset) = 0$ gilt.

Eigenschaften der Inhaltsfunktion

Aus (M2) lässt sich eine Reihe wichtiger Eigenschaften von m ableiten:

Seien $A, B, A_1, \ldots, A_k \in \mathfrak{M}$, dann gilt

i) Falls $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ gilt

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} m(A_i).$$

ii) $m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$

iii) $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$

iv) $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad m(A) \leq m(B)$

Maß

Definition (Maß)

Ein Inhalt m auf $\mathfrak{M}$ heißt *Maß*, wenn anstelle von (M2) folgende schärfere Bedingung gilt: Sei $(A_n, n \in \mathbb{N})$ Folge *paarweise disjunkter Mengen* aus $\mathfrak{M}$, so ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$ und es gilt:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \tag{M3}$$

Die Verschärfung von (M2) zu (M3) bedingt offenbar höhere Anforderungen an die dem Maß zugrundeliegende Menge von Teilmengen $\mathfrak{M}$. Es wird gefordert, dass diese auch unter abzählbar (unendlichen) Vereinigungen stabil ist!

Äquivalente Charakterisierung von Maßen

Man kann zeigen, dass (M3) äquivalent zu folgender Forderung ist:

Ist $B_1, B_2, \ldots$ eine aufsteigende Folge von Mengen aus $\mathfrak{M}$, d.h. $B_i \subseteq B_{i+1}$ für $i \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathfrak{M}$ und es gilt:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n\to\infty} m(B_i). \tag{M3'}$$

Zudem gilt als wesentliche Folgerung aus (M3): Sei $(A_n, n \in \mathbb{N})$ beliebige Folge von Mengen aus $\mathfrak{M}$. Dann gelten

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M} \qquad \text{und} \qquad m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

In diesen Kontext ist auch Folgerung 2.6 aus dem Skript einzuordnen.

Quader

Die bisherigen Forderungen (M1) bis (M3) sind für beliebige Maße und das zugrundeliegende Mengensystem sinnvoll. Die verbleibende Forderung (M4) soll das Lebesgue-Maß eindeutig kennzeichnen. Dazu werden die folgenden Begriffe eingeführt:

Seien $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

- *offener Quader*:
  $Q_1 = \{x : a_i < x_i < b_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}$
- *abgeschlossener Quader*:
  $Q_2 = \overline{Q_1}$
- *Quader* Q:
  $Q_1 \subseteq Q \subseteq Q_2$
- *halboffener Quader*:
  $Q = Q(a_i, b_i) = \{x : a_i \leq x_i < b_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n\}$

Charakterisierung des Lebesguemaßes für Quader

Das Maß von (halboffenen) Quadern soll – der Anschauung entsprechend – wie folgt definiert werden:

Sei $Q = Q(a_i, b_i)$ halboffener Quader. Dann gelten

$$Q \in \mathfrak{M} \qquad \text{und} \qquad mQ = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \tag{M4}$$

Der Rest dieses Abschnitts wird nun der Suche nach einem geeigneten System von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und einem Maß m auf diesem Mengensystem gewidmet, so dass (M1) bis (M4) erfüllt sind.

Der erste Kandidat: $\mathfrak{M}_0$

Wir setzen zunächst

$$\mathfrak{M}_0 := \{\text{Vereinigungen endlich vieler halboffener Quader}\}.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt:

- $m|_{\mathfrak{M}_0}$ erfüllt (M1).
- $m|_{\mathfrak{M}_0}$ erfüllt (M2).
- $m|_{\mathfrak{M}_0}$ erfüllt (M3) nicht. (per Konstruktion)
- $m|_{\mathfrak{M}_0}$ erfüllt (M4). (per Konstruktion)

(u.a. gilt jede endliche Vereinigung von halboffenen Quadern ist darstellbar als endliche Vereinigung punktfremder Quader.)

Der zweite Kandidat $\mathfrak{M}_1$

$\mathfrak{M}_0$ erfüllt die Eigenschaft (M3) nicht, da nicht jede Vereinigung abzählbar vieler Quader in $\mathfrak{M}_0$ liegt. Somit ist folgende Verallgemeinerung naheliegend:

$$\mathfrak{M}_1 := \{\text{Vereinigungen abzählbar vieler halboffener Quader}\}.$$

Dieses Mengensystem lässt sich gleichwertig wie folgt charakterisieren:

$$\mathfrak{M}_1 := \{\text{Vereinigungen aufsteigender Folgen von Mengen aus } \mathfrak{M}_0\}$$

$\mathfrak{M}_1$ ist offenbar vereinigungs- und durchschnittsstabil. Allerdings wurde in der Vorlesung illustriert, dass $\mathfrak{M}_1$ nicht differenzstabil ist. (Differenz zweier offener Kreisschreiben!)

Der zweite Kandidat: $\mathfrak{M}_1$

Zusammenfassend gilt für m auf $\mathfrak{M}_1$:

- $m|_{\mathfrak{M}_1}$ erfüllt (M1) nicht vollständig (Differenzen).
- $m|_{\mathfrak{M}_1}$ erfüllt (M2).
- $m|_{\mathfrak{M}_1}$ erfüllt (M3). (per Konstruktion).
- $m|_{\mathfrak{M}_1}$ erfüllt (M4). (per Konstruktion).

Übrigens habt ihr als Übungsaufgabe gezeigt, dass $\mathfrak{M}_1$ bereits alle offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ enthält.

Das äußere Maß

Um einer größeren Klasse (im Vergleich zu $\mathfrak{M}_1$) von Mengen ein Maß zuzuordnen wird folgende Erweiterung des Lebesguemaßes eingeführt:

Definition

Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

$$\overline{m}(A) := \inf\{m(A') : A' \in \mathfrak{M}_1 \text{ und } A \subseteq A'\}$$

äußeres Lebesguesches Maß.

Dieser erweiterte Maßbegriff setzt nicht mehr vorraus, dass sich die betrachte Teilmenge als abzählbare Vereinigung von Quadern darstellen lässt. Allerdings ist das System der „zulässigen" Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ echt kleiner als dessen Potenzmenge zu wählen.

Messbarkeit von Mengen

Die Menge der zulässigen Mengen wird mittels folgender Definition eingeschränkt:

Definition

A heißt **messbar** im Sinne von Lebesgue (oder kurz **L-messbar** bzw. **messbar**), d.h. $A \in \mathfrak{M}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Mengen A' und A'' aus $\mathfrak{M}_1$ gibt mit

$$A \subseteq A', \quad A' \setminus A \subseteq A'', \quad m(A'') < \varepsilon.$$

Ist A messbar, so heißt $m(A) := \overline{m}(A)$ das **Lebesgue-Maß** (L-Maß) von A.

Das Lebesgue Maß

Mit der Erweiterung des Lebesguemaßes und dessen Einschränkung auf messbare Mengen ist das eingangs formulierte Ziel erreicht:

$\mathbf{m}|_{\mathfrak{M}}$ **erfüllt (M1) bis (M4).**

Des Weiteren wurde noch in der VL gezeigt:

Theorem

Jede kompakte Menge ist messbar und hat endliches Maß.

Nullmengen

Theorem

Jede Menge A mit $\overline{m}(A) = 0$ ist messbar. Eine solche Menge heißt **Nullmenge***.*

Weiter gelten:

- Jede Teilmenge einer Nullmenge ist Nullmenge.
- Jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist Nullmenge.
- Alle einpunktigen Menge sind Nullmengen.

Aus den letzten beiden Feststellungen folgt übrigens:

Die Punkte des Einheitsintervalls (und damit auch die einer Kreislinie) sind nicht abzählbar. Sonst hätte das Einheitsintervall im $\mathbb{R}^1$ das Maß 0, was einen Widerspruch zu (M4) bildet.

Outline

2 Lebesguesches Integral

- Konstruktion des Integrals
- Rechenregeln
- Alternative Konstruktion des Integrals

Überblick

Ziel ist es auf Basis des zuletzt konstruierten Maßbegriffs einen Integralbegriff zu erarbeiten.

1. Dessen Konstruktion wird auf den nachfolgenden Folien zunächst in Anlehnung an die Vorlesung zusammengefasst.
2. Anschließend werden wichtige Rechenregeln und Sätze zur L-Integrierbarkeit dargestellt.
3. Schließlich wird die Idee des Lebesgueintegrals durch die Skizze einer alternativen Konstruktion weiter veranschaulicht.

Schwankungssumme 1

In der Vorlesung wird ein Zugang gewählt, der große Ähnlichkeit mit der Riemannschen Integralkonstruktion aufweist.

Dazu sind zunächst die folgenden Begriffe zu formalisieren:

Definition (Schwankung)

Die **Schwankung** $s(f, A)$ einer Funktion f auf einer Teilmenge ihres Defintinitionsbereichs A sei definiert durch

$$s(f, A) := \sup_{x,y \in A} |f(y) - f(x)|.$$

Schwankungssumme 2

Definition (Zerlegung)

Ein Mengensystem $\{A_i\} = \mathcal{Z}$ heißt **Zerlegung** von A, wenn A die *disjunkte* Vereinigung $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist mit $A_i \in \mathfrak{M}$ und $m(A_i) < \infty$.

Definition (Schwankungssumme)

Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von A und gilt jeweils $s(f, A_i) < \infty$, so heißt

$$S(f, \mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^{\infty} s(f, A_i) m(A_i)$$

die **Schwankungssumme** von f bezüglich $\mathcal{Z}$.

Messbarkeit von Funktionen

Aufbauend auf diesem Begriff wird die Messbarkeit von Funktionen formalisiert:

Theorem

Sei A messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von A mit $S(f, \mathcal{Z}) \leq \varepsilon$.*

(ii) *Für jede offene Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}^m$ ist*

$$f^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in C\}$$

messbar.

Definition

Eine Funktion f heißt auf A **messbar**, wenn A messbar ist und die äquivalenten Bedingungen aus obigem Satz erfüllt sind.

Integrierbarkeit von Funktionen

Sei nun f auf A messbar und $\mathcal{Z} = \{A_i\}$ eine Zerlegung von A, so dass jedes A_i ein endliches Maß hat. Wähle nun jeweils ein $x_i \in A_i$ und setze

$$R(f, \mathcal{Z}) = \sum_{i-1}^{\infty} f(x_i)m(A_i).$$

Problem: Diese Summe konvergiert nicht für jedes f und beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von A. Dies führt zu folgender Begriffsbildung:

Definition (Integrierbarkeit)

Eine auf A messbare Funktion f heißt **über** A **integrierbar**, wenn für jede Zerlegung $\mathcal{Z} = \{A_i\}$ von A mit $S(f, \mathcal{Z}) < \infty$ die Reihe $R(f, \mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)m(A_i)$ mit $x_i \in A_i$ absolut konvergiert.

Diese Definition setzt natürlich voraus, dass die Konvergenz unabhängig von der Wahl der Stellen x_i ist (vgl. Hilfssatz 2.23 VL).

Das Lebesgueintegral

Definition

Sei f über A integrierbar und $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \ldots$ eine Folge von Zerlegungen von A mit $\lim_{i \to \infty} S(f, \mathcal{Z}_i) = 0$. Dann heißt

$$\int_A f(x)dx = \int_A f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$$
$$:= \lim_{i \to \infty} R(f_i, \mathcal{Z}_i)$$

das **Lebesguesche Integral** von f über A.

Damit dieses Integral wohldefiniert ist, muss gezeigt werden dass der Grenzwert existiert und unabhängig von der Zerlegungsfolge ist. Dies folgt aus der geforderten Messbarkeit von f mittels Hilfssatz 2.27 VL.

Integrationsregeln

(i) Seien f, g über A integrierbar und a, b Konstanten. Dann ist auch $af + bg$ über A integrierbar, und es gilt

$$\int_A af(x) + bg(x)\ dx = a\int_A f(x)dx + b\int_A g(x)dx.$$

(ii) Seien A, B messbare Mengen mit $A \cap B = \emptyset$. Genau dann ist f über $A \cup B$ integrierbar, wenn f über A und über B integrierbar ist. Dann gilt

$$\int_{A\cup B} f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx.$$

(iii) Sind f und g über A integrierbar und $f \le g$, so gilt

$$\int_A f(x)dx \le \int_A g(x)dx.$$

Dies folgt aus der entsprechenden Ungleichung für Näherungssummen.

Integrationsregeln

(iv) Ist f auf A messbar (bzw. integrierbar), so ist auch $|f|$ auf A messbar (bzw. integrierbar). (Vorsicht: Aus der Messbarkeit von $|f|$ folgt i.a. nicht die Messbarkeit von f.)

(vi) Ist f über A integrierbar, so gilt

$$\left|\int_A f(x)dx\right| \leq \int_A |f(x)|dx.$$

(vii) Sei f auf A messbar und g über A integrierbar. Gilt $|f(x)| \leq g(x)$ auf A, so ist f über A integrierbar.

(viii) Sei A messbar mit $m(A) < \infty$. Dann ist jede konstante Funktion $f(x) \equiv c$ über A integrierbar und es gilt $\int_A f(x)dx = c \cdot m(A)$. (Wähle die Zerlegung $\mathcal{Z} = \{A\}$; dann ist $S(f, \mathcal{Z}) = 0$.)

Regeln zur Integrierbarkeit

Die Integrierbarkeit von f über A folgt u.a. aus

Satz 2.30 : A messbar, $m(A) < \infty$, $f_{|A}$ messbar, beschränkt

Satz 2.31 : A messbar, $m(A) < \infty$, $f_{|A}$ stetig, beschränkt

Satz 2.32 : A kompakt, $f_{|A}$ stetig

Riemann- und Lebesgueintegral

Ist f über $[a, b]$ Riemann-integrierbar (im eigentlichen Sinn), so ist f über $[a, b]$ auch Lebesgue-integrierbar und die Integrale stimmen überein.

Aber Vorsicht: Es ist möglich, dass das uneigentliche Riemann-Integral existiert, ohne dass das entsprechende Lebesgue-Integral existiert. Das prominenteste Beispiel ist

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird – wie eingangs angekündigt – eine alternative Konstruktion des Lebesgueintegrals skizziert:

Alternative Konstruktion: Schritt 1

Das Integral für Elementarfunktionen

Das Integral wird zunächst für sogenannte Elementarfunktionen definiert. Dabei handelt es sich um *messbare*, *nicht negative Funktionen* von der Form

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x), \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}^+, A_i \text{ messbar}$$

(χ_{A_i} bezeichnet die Indikatorfunktion (charakteristische Funktion) der Menge A_i.) Eine solche Funktion ϕ kann offenbar nur *endlich viele Werte* annehmen.

Das Integral von Elementarfunktionen wird wie folgt definiert:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i)$$

Alternative Konstruktion: Schritt 2

Das Integral nicht negativer messbarer Funktionen

Sei f eine nicht negative, messbare Funktion.

Dann existiert eine Folge von Elementarfunktionen $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$ mit

1. $\phi_n(x) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$
2. $\phi_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ (Zu zeigen!)

Das Integral von f wird dann wie folgt definiert:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_n dx$$

Zu zeigen, dass Integral von der Wahl der Folge $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$ unabhängig ist.

Alternative Konstruktion: Schritt 3

Zerlegung in Positiv- und Negativteil

Setze:

- $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$
- $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$

Für $\int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx < \infty$ und $\int_{\mathbb{R}^n} f^- dx < \infty$, dann setze

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^- dx$$

Outline

3 Zentrale Sätze der Integrationstheorie

- Konvergenzsätze
- Satz von Fubini
- Transformationsformel

Fragestellung

Der vorliegende Abschnitt beschäftigt sich mit der Integrierbarkeit der Grenzfunktion (gemeint ist der punktweise Limes) einer Funktionenfolge $(f_n, n \in \mathbb{N})$ oder anders gesagt mit der Vertauschbarkeit von Grenzwertbildung und Integration. Im ersten Schritt ist die Messbarkeit dieser Funktion sicherzustellen, vgl. dazu

Theorem

Ist $f_1, f_2, \ldots$ eine Folge von über A messbaren Funktionen $f_i : A \to \mathbb{R}^m$ und existiert für alle $x \in A$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$, so ist f über A messbar.

Die anschließende Frage nach der Integrierbarkeit der Grenzfunktion und ihrem Integral wird von folgenden „berühmten Sätzen“ beantwortet:

Satz von B. Levi (von der monotonen Konvergenz)

Theorem

Seien

- A *messbar*
- $f_1, f_2, \ldots$ *auf* A *definierte reelle Funktionen*
- $f_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $f_{n-1} \leq f_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$
- f_n *seien über* A *integrierbar mit* $\int_A f_n(x)dx < s$.

Dann ist $\{f_n(x)\}$ *für fast alle* $x \in A$ *beschränkt, die Grenzfunktion* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *ist über* A *integrierbar, und es gilt:*

$$\int_A f(x)dx = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx.$$

Tipps zur Anwendbarkeit des Konvergenzsatzes

Um die Voraussetzungen des Satzes zu erfüllen sind evtl. folgende „Tricks“ nützlich:

- Falls $f_1 < 0$, betrachte $\tilde{f}_n = f_n - f_1$
- Falls f_n monoton fallend, betrachte $\tilde{f}_n = -f_n$

Als wesentliche Voraussetzung zur Anwendbarkeit des Satzes verbleibt somit die Monotonie der Funktionenfolge.

Satz von H. Lebesgue (von der majorisierten Konvergenz)

Theorem

Seien

- $(f_i, i \in \mathbb{N})$ *reellwertige Funktionenfolge, über* A *integrierbar*
- g *reellwertige Funktion, über* A *integrierbar*
- $|f_i(x)| \leq g(x)$ *für alle* $x \in A$
- *für fast alle* $x \in A$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

Dann gilt:

- f *ist über* A *integrierbar*
- $$\int_A f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx.$$

Charakteristische Funktion

Definition (Charakteristische Funktion)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Punktmenge und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion* oder *Indikatorfunktion* von A.

Diese Funktion wird häufig auch mit folgenden Schreibweisen notiert:

$$\mathbb{1}_A(x) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{I}_A(x)$$

Maß und charakteristische Funktion von A

In der Vorlesung wurde der folgende grundlegende Zusammenhang zwischen dem Maß einer Menge und ihrer Indikatorfunktion verifiziert:

Theorem

Genau dann ist A messbar mit endlichem Maß, wenn χ_A integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$m(A) = \int \chi_A(x)dx.$$

Der Satz von Fubini

Theorem (Fubini)

Sei $f(x)$ integrierbar über $\mathbb{R}^n$. Dann existiert auch das Integral $\int f(y,z)dy$ für fast alle $z \in \mathbb{R}^s$ $(0 < s < n)$ und es gilt

$$\int f(x)dx = \int \left(\int f(y,z)dy \right) dz.$$

Dieses Resultat verallgemeinert den für das kartesische Produkt von Quadern (etwa $Q' \subset \mathbb{R}^s$ und $Q'' \subset \mathbb{R}^r$) bekannten Zusammenhang:

$$Q = Q' \times Q'' \subset \mathbb{R}^{r+s} \qquad \Rightarrow \qquad m_{s+r}(Q) = m_s(Q') \cdot m_r(Q'')$$

Satz von Fubini

Aus dem Satz lassen sich die folgenden – zur Berechnung von mehrdimensionalen Integralen zentralen – Beobachtungen ableiten:

Falls (!) das Integral $\int f(x)dx$ existiert,

- kann es durch *iterative Integration* berechnet werden, d.h.

$$\int f(x)dx = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

- In diesem Fall (d.h. die Integrierbarkeit der Funktion voraussetzend) ist das Integral von der Integrationsreihenfolge unabhängig, also bspw. für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\int f(x)dx = \int \int f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int \int f(x_1, x_2) dx_2 dx_1.$$

Thema bzw. Motivation

Zum Abschluss des Abschnitts über mehrdimensionale Integration wurde das Analogon zur (eindimensionalen) Substitutionsregel erarbeitet. Diese lautet für geeignete (siehe Ana 1:) Funktionen f, g

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx$$

Dies soll nun für höherdimensionale Integrale verallgemeinert werden:

Transformationssatz: Voraussetzungen

Die zu betrachtende Transformation wird im eindimensionalen Fall mit g bezeichnet. Dies ist nun eine Abbildung von $A \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$, also

$$g : A \to \mathbb{R}^n \qquad \text{mit } A \subset \mathbb{R}^n.$$

Es muss zusätzlich gefordert werden, dass

- g bijektiv
- g stetig differenzierbar
- $\det(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}) \neq 0 \ \forall \ x$, d.h. die Funktionaldeterminate (Determinate der Jacobimatrix) verschwindet nirgendwo!

Als Forderung an f muss lediglich die Integrierbarkeit gestellt werden.

Transformationsformel

Theorem

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g : A \to g(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine umkehrbar eindeutige, stetig differenzierbare Abbildung, deren Funktionaldeterminante nirgends verschwindet, und f eine auf $g(A)$ definierte Funktion. Wenn eines der beiden Integrale

$$\int_{g(A)} f(y)dy \quad \text{und} \quad \int_A f(g(x)) \left| \det \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) \right| \, dx$$

existiert, so auch das andere und beide Integrale sind gleich.

Der Beweis dieses Satz kann mit einem an die dargestellte alternative Konstruktion des Lebesgueintegrals angelehnten mehrstufigen Approximationsargument geführt werden. (Dies gilt übrigens auch für den Satz von Fubini).

Zwei bedeutende Spezialfälle

- Für affine Transformationen, d.h. $g(x) = Cx + b$ mit einer quadratischen Matrix C, gilt offenbar

$$\int_{g(A)} f(y)dy \quad \text{und} \quad \int_A f(Cx+b) \left|\det(C)\right| \, dx$$

  Wählt man $f(y) = \chi_A(y)$ folgt aus diesem Zusammenhang, dass das Lebesgue-Maß bewegungsinvariant ist (d.h. invariant unter orthogonalen Transformationen).

- Des Weiteren kann auch die Bedeutung der Transformation zu Polarkoordinaten kaum überschätzt werden. (Unbedingt anschauen und üben – zumindest 2D!)