UNIVERSITÄT MANNHEIM
Fakultät für Mathematik und Informatik
<u>*Prof. Dr. H.-J. Bartels*</u>

Wiederholungsklausur Analysis I am 24.4.2009
(Dauer: 90 Minuten)

Aufgabe 1: (a) Wohin konvergiert die Folge $a_n := \frac{n}{n+1} + i\frac{(-1)^n}{n}$ komplexer Zahlen ?
(i bezeichnet wie üblich die imaginäre Einheit, deren Quadrat -1 ergibt)
Man begründe die Konvergenz. *(3 Punkte)*

(b) Konvergiert die Folge $a_n := (1+\frac{1}{n^2})^n$? Man gebe gegebenenfalls den Grenzwert an. *(3 Punkte)*

(c) Konvergiert die Folge $a_n := \frac{3n+1}{5n-2}$? Man gebe gegebenenfalls den Grenzwert an. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2: Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (2 *Punkte*) (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n})$ (2 *Punkte*) (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *(2 Punkte).*

(iv) Man berechne bei einer dieser Reihen im Falle der Konvergenz den Grenzwert *(2 Punkte).*

Aufgabe 3: Bestimmen Sie den größten und kleinsten Wert, den die Funktion g(x)=x - cos(x) auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ annimmt (4 Punkte).

Aufgabe 4: Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z mit $|z-i| < |z+i|$ *(2 Punkte).*

Aufgabe 5: Für jede natürliche Zahl n sei $f_n(x) := \frac{1}{n}$ für $x \in [n, n+1)$ und $f_n(x) := 0$ für $x \notin [n, n+1)$. Man zeige: Diese Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert punktweise absolut, aber $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ konvergiert nicht, wenn $\|f\| := \sup_{x\in\Re} |f(x)|$ die Supremums-Norm von Funktionen auf der reellen Zahlengeraden bezeichnet.
(4 Punkte)

Aufgabe 6: Man berechne folgende Grenzwerte, falls sie existieren:

(i) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1-\cos x}\right)$ *(2 Punkte)*;

(ii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ *(2 Punkte)*;

(iii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x\cdot\sin(x)}\right)$ *(2 Punkte)*.

Aufgabe 7: Man berechne die Taylorreihe von e^x im Punkt 1.
Konvergiert diese Reihe? *(4 Punkte)*.

Aufgabe 8: Man integriere: (i) $\int_a^b e^x \sin x \, dx$ (ii) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

(6 Punkte).

Zugelassene Hilfsmittel: Keine

Bitte geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgaben getrennt ab!