UNIVERSITÄT MANNHEIM
Fakultät für Mathematik und Informatik
<u>*Prof. Dr. H.-J. Bartels*</u>

Klausur Analysis I am 29.1.2009
(Dauer: 90 Minuten)

Aufgabe 1: (i) Zeigen Sie, dass die Folge $a_n := (-1)^n \dfrac{2n}{n!}$ gegen 0 konvergiert. *(2 Punkte)*

(ii) Konvergiert die Folge $a_n := \dfrac{1+(-1)^n}{n}$? *(2 Punkte)*

(iii) Man zeige: Sind (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, so ist $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2: Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (\dfrac{1}{2^n} + i\,\dfrac{1}{3^n})$ (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(n+2)!}$ *(jeweils 2 Punkte).*

(iv) Man berechne bei einer dieser Reihen im Falle der Konvergenz den Grenzwert *(2 Punkte).*

Aufgabe 3: Mit k(x) seien die Gesamtkosten bezeichnet, die ein Produktionsbetrieb aufwenden muss, um x Einheiten einer bestimmten Ware herzustellen. Die Ableitung k´(x) nennt man die Grenzkostenfunktion, die Funktion s(x):= k(x)/x die Stückkosten oder durchschnittlichen Kosten.
Unter der Voraussetzung, dass alle auftretenden Funktionen differenzierbar sind, zeigen Sie: Besitzen die durchschnittlichen Kosten bei x_0 ein Minimum, so stimmen an dieser Stelle Durchschnittskosten und Grenzkosten überein *(4 Punkte).*

Aufgabe 4: Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z mit $z^2 = -2i$ *(2 Punkte).*

Aufgabe 5: Sei I ein reelles Intervall. Man zeige: Eine Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiert auf I genau dann gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f auf I , wenn es eine Nullfolge (a_n) gibt, so dass $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| \le a_n$ für fast alle n und alle x in I gilt. Dabei gilt eine Aussage für fast alle natürlichen Zahlen n, wenn sie richtig ist für alle natürlichen Zahlen bis auf endlich viele Ausnahmen. *(4 Punkte)*

Aufgabe 6: Man berechne folgende Grenzwerte, falls sie existieren:

(i) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$ *(2 Punkte)*;

(ii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ *(2 Punkte)*;

(iii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\tan(x)}{x-\sin(x)}\right)$ *(2 Punkte)*.

Aufgabe 7: Man berechne die Taylorreihe von sinh (x) := $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ im Nullpunkt.

Wo konvergiert die Taylorreihe und stellt die Funktion sinh(x) dar ? *(4 Punkte)*.

Aufgabe 8: Man integriere unbestimmt: (i) $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$ (ii) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$

(6 Punkte).

Zugelassene Hilfsmittel: Keine

Bitte geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgaben getrennt ab!