UNIVERSITÄT MANNHEIM
Fakultät für Mathematik und Informatik
Prof. Dr. H.-J. Bartels

Übungen zur Analysis II , FS 2009

Blatt 2

Aufgabe 1: Eine Folge (x_n) aus einem Raum M mit der Metrik d heißt konvergent gegen x $\in$M, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $d(x_n, x) < \varepsilon$ für fast alle natürlichen n. Zeige: der Grenzwert x ist dann eindeutig bestimmt. Ist die Folge (f_n) mit $f_n(t) := t^n$ für t $\in [0,1]$ im Raume C unter d_1 oder im Raume C unter d_2 konvergent? Bestimme gegebenenfalls den Grenzwert. Folgt in C aus der Konvergenz unter d_1 die Konvergenz unter d_2 und umgekehrt? (6 Punkte)
(Hinweis: Es werden die Notationen von Aufgabe 2 von Blatt 1 verwendet !)

Aufgabe 2: Für die folgenden Mengen im R^2 bestimme man: Randpunkte, innere Punkte, äußere Punkte, abgeschlossene Hülle. Welche der Mengen sind offen, welche abgeschlossen, welche kompakt?

a) $\{(x, y) | x(xy - 1) = 0\}$

b) $\{(x, y) | x \in Q, y \notin Q\}$, dabei ist Q die Menge der rationalen Zahlen

c) $\{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1\} \cap \left\{(x, y) \middle| x^2 + y^2 \neq \frac{1}{n^2} \textit{ für alle natürlichen } n\right\}$ *(6 Punkte)* .

Aufgabe 3: Für eine Menge $X \subseteq R^n$ sei IX der offene Kern, AX die abgeschlossene Hülle.Zeige:

a) Aus $X \subseteq Y$ folgt $IX \subseteq IY$ und AX$\subseteq$AY

b) I(IX) = IX, A(AX) = AX . (4 Punkte).

Aufgabe 4: Beweise: Jede nichtleere, echte Teilmenge des n-dimensionalen Raumes R^n besitzt mindestens einen Randpunkt *(4 Punkte).*

Bitte bearbeiten Sie 2-4 Aufgaben.

Abgabetermin: Mittwoch, d. 4.3.09 10.00 Uhr.