UNIVERSITÄT MANNHEIM
Fakultät für Mathematik und Informatik
Prof. Dr. H.-J. Bartels

Übungen zur Analysis II , FS 2009

Blatt 1

Aufgabe 1: Man beweise für eine beliebige in [0,1] stetige Funktion f(x):

(i) $$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$$

(ii) $$\int_0^{\pi} f(\sin x)\cos x dx = 0 \quad .$$

(Anleitung: Man zeige allgemein: $\int_a^b F(x)dx = \int_a^b F(a+b-x)dx$ und wende dies für passende Werte von a und b auf die obigen Integrale an.)

Aufgabe 2: Ist $M \neq \emptyset$, so heißt eine Abbildung $d : M \times M \to IR$ mit
(i) $d(x,y) \geq 0$; (ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; (iii) $d(x,y) = d(y,x)$; (iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
mit $x,y,z \in M$ ein Abstand oder eine Metrik auf M, (M, d) oder kurz M heißt dann ein metrischer Raum. Ist $d_1(f,g) := \sup|f-g|$ auf dem Raum F aller Funktionen auf $[0,1]$ eine Metrik ?

Ist $d_2(f,g) := \int_0^1 |f-g| dx$ auf dem Raum C aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$ eine Metrik ?

Ist d_1 auf C eine Metrik ?

Aufgabe 3: Berechne die folgenden Grenzwerte, indem man die jeweiligen Folgenglieder als Riemannsche Summen geeigneter integrierbarer Funktionen betrachtet:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1}}{n\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right)$, *(ii)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$.

Aufgabe 4: Für 0 <a < b , k ganz berechne man direkt aus der Definition des Integrals
(ohne Hauptsatz) : (i) $\int_a^b x^k dx$; (ii) $\int_a^b e^x dx$.

Abgabetermin: Mittwoch, d. 25.2.2009 10.00 Uhr