UNIVERSITÄT MANNHEIM
Fakultät für Mathematik und Informatik
Prof. Dr. H.-J. Bartels

Übungen zur Analysis II , FS 2009

Blatt 13 (zur Wiederholung und Klausurvorbereitung)

Aufgabe 1: Es sei A := $\{(x,y) \mid 1 < \max\{x,y\} \leq 2\} \subseteq R^2$.

(i) Man bestimme die Menge der inneren Punkte und der äußeren Punkte sowie der Randpunkte von A;

(ii) Ist A offen ? Ist A abgeschlossen ?

Man begründe die jeweiligen Antworten .

Aufgabe 2: Ist die durch f(0,0) := 0 und f(x,y) = $\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ $\textit{für}$ $(x,y) \neq (0,0)$ definierte Funktion in (0,0) stetig ? Ist die Funktion f in (0,0) partiell differenzierbar ? Bitte begründen Sie Ihre Antwort !

Aufgabe 3: Sei f : $R^2 \to R$ definiert durch f(x,y) : = $2x^2 - 3xy^2 + y^4$. Zeige: f hat auf allen Geraden durch den Punkt (0,0) ein Minimum im Ursprung. (0.0) ist aber kein lokales Minimum von f .

Aufgabe 4: Sei f : $R^n \to R$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Mit Hilfe der zweiten partiellen Ableitungen von f gebe man ein hinreichendes Kriterium dafür an, daß f im Punkte $x \in R^n$ ein lokales Minimum hat.

*Aufgabe 5: E*s seien f : $R^n \to R$ eine stetig differenzierbare Funktion und g: $R^m \to R^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Ist die Funktion $f \circ g : R^m \to R$ wieder stetig differenzierbar ? Man berechne gegebenenfalls die partielle Ableitung $\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}(x_1,...,x_m)$ im Punkte $(x_1,...,x_m) \in R^m$ durch die partiellen Ableitungen von f bzw. g .

Aufgabe 6: Für feste positive reelle Konstanten r und c bezeichne f die durch f(t):= (r cos(t) , r sin(t), c t) t∈ R definierte Kurve im dreidimensionalen Raum. Ist das durch $0 \leq t \leq 2\pi$ begrenzte Kurvenstück rektifizierbar ? Man berechne gegebenenfalls seine Länge.

Aufgabe 7: Man zeige, dass die Funktion $f(x,y) := \frac{1}{x+y+1}$ über Q := $\{(x,y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ integrierbar ist. Man berechne $\int_Q \frac{1}{x+y+1} dxdy$.

Aufgabe 8: Sei Q ein beliebiger Quader im n-dimensionalen Raum. Man zeige: Es existiert ein offener Quader K und ein abgeschlossener Quader L mit $K \subseteq Q \subseteq L$ und m(L) = m(K), d.h. die Differenzmenge von L und K ist eine Nullmenge.

Aufgabe 9: Sind die folgenden Funktionen über $\Re$ integrierbar?

(i) f(x) : = $\frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\frac{1}{x})$ für $0 < x \leq 1$ und f(x) := 0 sonst ;

(ii) f(x) := log(x) für $0 < x \leq 1$ und f(x) := 0 sonst .

Aufgabe 10: Sei $B := \left\{(x,y) \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ mit a > 0, b > 0 . Man berechne $\int_B xydxdy$.

Abgabetermin: ∞