

Übungen zur Analysis I, HS 2008/09

Blatt 12 (Ferienblatt)

Aufgabe 1: Seien $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome. Sei $Q(x) \neq 0$ für $x \geq 0$. Man gebe ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, daß das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ existiert.

Aufgabe 2: Welche der folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh x}, \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Aufgabe 3: Sei $f(x) = \int_x^{\infty} \frac{\log(t)}{1+t^3} dt$. Man untersuche, wo f definiert, bzw. stetig bzw. differenzierbar ist. Man bestimme gegebenenfalls die Ableitung.

Aufgabe 4: Sei $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ ($n=1,2,\dots$). Man untersuche, wo $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ existieren. Konvergieren die Folge $(f_n(x))$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ auf dem offenen Intervall $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gleichmäßig?

Aufgabe 5: Man beweise für eine beliebige in $[0,1]$ stetige Funktion $f(x)$:

$$(i) \quad \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

$$(ii) \quad \int_0^{\pi} f(\sin x) \cos x dx = 0.$$

(Anleitung: Man zeige allgemein: $\int_a^b F(x) dx = \int_a^b F(a+b-x) dx$ und wende dies für passende Werte von a und b auf die obigen Integrale an.)

Aufgabe 6: Für natürliche m, n berechne man die Integrale $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx$,

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx.$$

Aufgabe 7: Berechne die folgenden Grenzwerte, indem man die jeweiligen Folgenglieder als Riemannsche Summen geeigneter integrierbarer Funktionen betrachtet:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{1}}{n\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \right) \quad , \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) .$$

Aufgabe 8: Für $0 < a < b$, k ganz berechne man direkt aus der Definition des Integrals

$$(\text{ ohne Hauptsatz }) : \quad (i) \int_a^b x^k dx \quad ; \quad (ii) \int_a^b e^x dx \quad .$$

Abgabetermin: ∞