Übungsblatt 11

Aufgabe 1:

Seien f, g Funktionen und a, b Vektorfelder die in einem Gebiet des $\mathbb{R}^n$ definiert und differenzierbar sind.

Es ist eine leichte Übung folgende Beziehungen nachzurechnen:

$$grad(fg) = g \cdot grad(f) + f \cdot grad(g)$$

$$div(fa) = f \cdot div(a) + grad(f) \bullet a$$

$$rot(fa) = f \cdot rot(a) + grad(f) \times a$$

$$div(a \times b) = b \bullet rot(a) - a \bullet rot(b)$$

Hier bezeichnet " $\bullet$ " das Skalarprodukt und " $\times$ " das Kreuzprodukt.

Aufgabe 4:

i)

Behauptung: Die Funktionenfolge f_k ist eine Cauchy-Folge bezüglich $L_1(\mathbb{R})$.

Beweis:

Sei f_k eine Funktionenfolge wie in der Aufgabenstellung definiert.

Es gilt:

$$\int_0^1 \left|f_i(x) - f_j(x)\right| dx \leq \int_0^1 |f_i(x)| dx + \int_0^1 \left|f_j(x)\right|$$

Die beiden Terme auf der rechten Seite genügen folgender Abschätzung:

$$\int_0^1 |f_k(x)| \leq \frac{1}{l} \text{ für } k = 2^l$$

Deshalb gilt:

$$\lim_{i,j \to \infty} \int_0^1 \left|f_i(x) - f_j(x)\right| dx = 0$$

q.e.d.