Analysis I

Universität Mannheim

Dozent: H.-J. Bartels
Schrift: P. Höpner

Kapitel 1

Zahlen und Funktionen

1.1 Mengen und Abbildungen

1.1.1 Der Mengenbegriff in der Mathematik
Benötigt werden Begriffe aus der Mengenlehre, die von **Georg Cantor** begründet wurde.

Cantors Definition lautete: „Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.“

Mengen werden stets mit Großbuchstaben bezeichnet. Objekte einer Menge A heißen **Elemente** von A, und wir schreiben $a \in A$. Ist a kein Element der Menge A, so schreiben wir $a \notin A$.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ bezeichnet eine endliche Menge mit den Elementen a_i $(i = 1, 2, \dots, n)$. Die Reihenfolge der Elemente ist bei einer Menge unerheblich.

Häufig werden Mengen auch durch Angabe einer Eigenschaft bezeichnet:

$$M = \{x : x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$$

bzw.

$$M = \{x \in A : x \text{ hat die Eigenschaft } E\}.$$

Im letzteren Fall ist M Teilmenge der Menge A, d.h. jedes Element von M ist auch Element der Menge A. Wir schreiben dafür $M \subseteq A$ (oder, was gleichbedeutend ist, $A \supseteq M$).

Mit $B \subseteq A$ soll also gemeint sein: $x \in B \Rightarrow x \in A$.

Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen führt man die **leere Menge** $\emptyset$ ein. Sie enthält kein Element und erfüllt $\emptyset \subseteq A$ für jede Menge A.

Die **Gleichheit zweier Mengen** kann man nun wie folgt definieren: $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

1.1.2 Mengenoperationen

Wir betrachten nun die Möglichkeiten, aus Mengen A, B neue Mengen zu bilden.

Die **Vereinigung** zweier Mengen A, B ist definiert als

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

Ebenso definiert man den **Durchschnitt** zweier Mengen als

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Die **Differenzmenge** ist definiert als

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

Schließlich definieren wir noch die **Produktmenge** als

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Es handelt sich also um die Menge aller Paare (man beachte, dass es bei einem Paar stets auf die Reihenfolge ankommt). Man bezeichnet die Produktmenge auch als direktes (oder kartesisches) Produkt der Mengen A und B.

Ebenso ist

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

die Menge der geordneten Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$.

Genau dann ist $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, wenn $a_i = b_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Oft ist $A_i = A$, d.h. $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$. Man schreibt in diesem Fall für $A_1 \times \ldots \times A_n$ auch A^n.

Zuletzt definieren wir noch die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A:

$$\mathcal{P}(A) := \{U : U \text{ Teilmenge von } A\}.$$

Übungsaufgabe: Ist A eine Menge mit n Elementen, so enthält die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ genau 2^n Elemente.

(Mit $:=$ bezeichnet man die Gleichheit per definitionem. Der Doppelpunkt steht bei dem zu definierenden Ausdruck.)
Die Mengenoperationen Vereinigung, Durchschnitt und Differenz kann man sich leicht durch die auf der nächsten Seite abgebildeten **Venn-Diagramme** veranschaulichen.

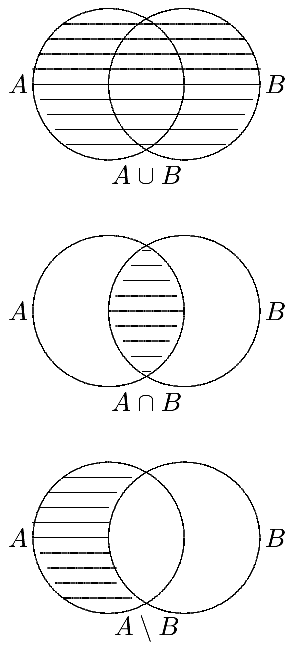

Abbildung 1.1: Dies ist die Veranschaulichung der elementaren Mengenoperationen mit Hilfe der Venn-Diagramme.

1.1.3 Abbildungen

Seien A, B Mengen.

Definition: Eine **Abbildung** (oder **Funktion**) f von A in (oder nach) B ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element $f(x) \in B$ zuordnet. Wir schreiben in diesem Fall $f : A \to B$. Die elementweise Zuordnung wird bezeichnet als $x \mapsto f(x)$ $(x \in A)$.

A heißt **Definitionsbereich** von f. Die Elemente von A heißen **Argumente** der Abbildung f. $f(x)$ heißt das **Bild** von x unter f (oder der **Funktionswert** von f an der Stelle x).

Zwei Abbildungen $f : A \to B,\ g : C \to D$ heißen **gleich**, wenn $A = C,\ B = D$ ist und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$ gilt. Wir schreiben dann $f = g$.

Nun definieren wir noch die **Komposition von Abbildungen**:
Seien A, B, C nichtleere Mengen und $f : A \to B,\ g : B \to C$ Abbildungen. Dann bezeichnet $g \circ f =: h$ die folgende Abbildung:

$$h : A \to C \quad \text{mit } h(x) = g(f(x)).$$

Man bezeichnet $g \circ f$ als die **Komposition** der Abbildungen f und g.

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt **injektiv**, wenn gilt:

$$x_1 \neq x_2,\ x_1, x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Äquivalent dazu ist die Aussage: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Die Abbildung $f : A \to B$ heißt **surjektiv**, wenn gilt:

$$f(A) = B,$$

dabei ist $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$.

D.h. $\forall\, y \in B\ \exists\, x \in A : f(x) = y$, in Worten: Für jedes $y \in B$ existiert ein $x \in A$ mit $f(x) = y$.

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist. D.h. zu jedem $y \in B$ existiert genau ein $x \in A$ mit $f(x) = y$.

In diesem Fall existiert die **Umkehrabbildung** $f^{-1} : B \to A$. Diese ordnet jedem Element $y \in B$ das Element $x \in A$ mit $f(x) = y$ zu. f^{-1} heißt die zu f **inverse** Abbildung.

Bezeichnet man mit $\mathrm{Id}_A : A \to A$ die **identische** Abbildung, so gelten für eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ die Identitäten

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A,\ \ f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B.$$

Im Ergebnis haben wir nun den folgenden
Satz 1.1 *Eine Abbildung $f : A \to B$ ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : B \to A$ gibt, so dass $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ gilt. g ist dann die inverse Abbildung zu f.*

Beweis: (i) Sei $f : A \to B$ bijektiv. Dann existiert per definitionem die inverse Abbildung $f^{-1} =: g$, es gelten also $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ und $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.

(ii) Umgekehrt: Es gebe eine Abbildung $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. Dann ist f injektiv, denn aus $x_1 \neq x_2$ folgt $\mathrm{Id}(x_1) \neq \mathrm{Id}(x_2)$, also $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$. Damit ist dann $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, also $f(x_1) \neq f(x_2)$.
f ist auch surjektiv, denn zu einem beliebigen $y \in B$ hat $x := g(y)$ die Eigenschaft $f(x) = y$. Damit ist die Bijektivität von f gezeigt. $\square$

(Das Zeichen $\square$ deutet, wie in Lehrbüchern üblich, das Ende eines Beweises an.)

1.2 Reelle Zahlen, ihre algebraischen Eigenschaften

Wir setzen als bekannt voraus:
- die Menge der **natürlichen Zahlen**: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$
- die Menge der **ganzen Zahlen**: $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$
- die Menge der **rationalen Zahlen**: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$
- die Menge $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen**: das sind alle Zahlen, die sich als unendlicher oder abbrechender Dezimalbruch schreiben lassen.

Reelle Zahlen, die nicht rational sind, nennt man **irrational**.

Um auf sicherem Boden zu stehen, werden wir im folgenden **Axiome** formulieren, aus denen sich alle Eigenschaften und Gesetze der reellen Zahlen ableiten lassen. Zunächst die **Körperaxiome** (2.1)-(2.5):
Auf $\mathbb{R}$ hat man zwei Verknüpfungen, nämlich die **Addition**

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

und die **Multiplikation**

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

(wobei man das Multiplikationszeichen oft weglässt, also $x \cdot y$ auch als xy schreibt) mit folgenden Regeln:

(2.1) Addition und Multiplikation sind **kommutativ**:

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

(2.2) Addition und Multiplikation sind **assoziativ**:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

(2.3) Es gibt zwei voneinander verschiedene, bezüglich der Addition bzw. der Multiplikation **neutrale** Elemente 0 und 1 mit

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a$$

für beliebige $a \in \mathbb{R}$.

(2.4) Zu jedem a gibt es ein bezüglich der Addition **inverses** Element $-a$ mit $a + (-a) = 0$. Ebenso gibt es zu jedem $a \neq 0$ ein bezüglich der Multiplikation inverses Element $\frac{1}{a}$ mit $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

(2.5) Addition und Multiplikation sind **distributiv** verknüpft:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Eine Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, mit denen die Eigenschaften (2.1) bis (2.5) erfüllt sind, heißt **Körper**. Die reellen Zahlen bilden also einen Körper, ebenso die rationalen Zahlen. Dagegen sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ keine Körper, da es in ihnen nicht zu jedem Element ein multiplikatives Inverses gibt.

Aus den Eigenschaften (2.1) bis (2.5) folgen weitere Regeln, z.B.:

(2.6) Die Gleichung $a + x = b$ hat die eindeutig bestimmte Lösung $x = -a + b$. Für diese schreibt man auch einfacher $x = b - a$.

(2.7) Ist a von 0 verschieden - in Zeichen $a \neq 0$ -, so hat die Gleichung $ax = b$ die eindeutig bestimmte Lösung $x = \frac{1}{a} \cdot b$, für die man auch einfacher $x = \frac{b}{a}$ schreibt.

(2.8) Ein Produkt $a \cdot b$ verschwindet (wird Null) dann und nur dann, wenn mindestens einer der Faktoren a, b verschwindet.

(2.9) Eine Summe bzw. ein Produkt von mehreren Zahlen ist unabhängig von der Reihenfolge der Summanden bzw. der Faktoren und von der Art der Zusammenfassung; z.B.

$$(a+b)+(c+d) = (a+(b+c))+d,$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (c \cdot a) \cdot b,$$

wofür man dann einfach $a+b+c+d$ bzw. abc schreibt. Das folgt durch mehrfache Anwendung der Regeln (2.1) und (2.2). Entsprechend erhält man durch mehrfache Anwendung von (2.5) unter Benutzung von (2.9) die Formel

(2.10) $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)(b_1 + \cdots + b_n) =$

$$\begin{aligned}
&= a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots + a_1b_n \\
&+ a_2b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_2b_n \\
&\qquad\vdots \\
&+ a_mb_1 + a_mb_2 + \cdots + a_mb_n.
\end{aligned}$$

Die **Potenz** a^n zur **Basis** a und dem **Exponenten** n ist, zunächst nur für natürliche Exponenten, als Produkt von n Faktoren a definiert: $a^n := a \cdot a \cdot \ldots a$. Die Potenz kann auch induktiv durch $a^1 := a$ und $a^{n+1} := a \cdot a^n$ definiert werden. Es gelten die **Potenzgesetze**

(2.11) $\quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (ab)^n = a^n b^n, \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$

Wir erweitern nun die Definition der Potenz so, dass der Exponent alle ganzzahligen Werte annehmen kann und dabei (2.11) gültig bleibt:

(2.12) Definition: $a^0 := 1,\ a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ *für natürliche Zahlen* n *und für beliebige* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ein kleines Problem ist die Definition der Potenz 0^0. Wir haben nämlich $a^0 = 1$ gesetzt für alle von Null verschiedenen a, andererseits ist $0^n = 0$ für alle natürlichen Zahlen n. Man definiert

(2.13) $\quad 0^0 = 1$

und lässt $0^{-1}, 0^{-2}$ usw. undefiniert (ihre Definition wäre ohne Verletzung der Potenzgesetze nicht möglich).
Wir benötigen ferner

(2.14) $\quad n! := n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1,$

lies „n Fakultät“. Man kann zeigen: $n!$ ist die Anzahl der Permutationen von n Elementen. Unter einer **Permutation** versteht man eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, \ldots, n\}$ in sich.

Die **Binomialkoeffizienten** sind wie folgt definiert (mit $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$):

(2.15) $\quad \binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1},$

lies „n über k“. Der Binomialkoeffizient ist gleich der Anzahl der Teilmengen mit genau k Elementen einer Menge von n Elementen.

Beispiel: Die Menge der drei Buchstaben a,b,c besitzt genau $\binom{3}{2} = \frac{3!}{1!2!} = 3$ Teilmengen mit zwei Elementen , nämlich $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$, $\{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}$ und $\{\mathrm{a}, \mathrm{c}\}$.

Man definiert noch

(2.16) $\quad 0! := 1, \quad \binom{n}{0} := 1.$

Es gilt die wichtige Regel

(2.17) $\quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$

Denn $\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k \cdot n! + (n-k+1)n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}.$

Auf Grund dieser Regel kann man die Binomialkoeffizienten im sogenannten **Pascalschen Dreieck** anordnen, wobei jede Zahl gleich der Summe der beiden schräg über ihr stehenden ist.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

Die Binomialkoeffizienten treten auf, wenn man ein Produkt der Form $(a+b)^n$ ausmultipliziert. Es gilt nämlich der **binomische Lehrsatz**

(2.18) $\quad (a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Dabei haben wir der Einfachheit halber zum ersten Mal Summenzeichen als Abkürzung verwendet. Das Summenzeichen ist wie folgt definiert (mit ganzen Zahlen $l \geq k$):

(2.19) $\quad \sum_{i=k}^{l} a_i := a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l,$

lies „Summe a_i über i von k bis l“.

Wir wollen nun (2.18) beweisen. Dazu wenden wir das Beweisprinzip der **vollständigen Induktion** an, wie es in der ganzen Mathematik weit verbreitet ist. Um eine Eigenschaft $E(n)$ für alle natürlichen Zahlen zu beweisen, geht man wie folgt vor:

1. **Induktionsanfang:** Man beweist $E(1)$.
2. **Induktionsannahme:** Man nimmt an, $E(n)$ sei für ein n schon bewiesen.
3. **Induktionsschluss:** Man zeigt, dass unter der Induktionsannahme auch $E(n+1)$ gilt.

Die Behauptung überträgt sich dann von $n = 1$ durch den Induktionsschluss auf $1 + 1 = 2$ und von da aus weiter auf $2 + 1 = 3$ usw., insgesamt also auf alle natürlichen Zahlen.

Nun der Beweis von (2.18):

Induktionsanfang: $(a + b)^1 = a^1 + b^1 = a + b$.

Induktionsannahme: Es gelte $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Induktionsschluss: Es ist dann

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k\right)(a+b) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1}b^k + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}b^k + b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}b^k$$

(der vorletzte Schritt verwendet (2.17)). □

Zu dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion geben wir hier noch ein weiteres Beispiel:

(2.20) $\quad \sum_{\nu=1}^{n} \nu = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$

Induktionsanfang: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

Induktionsannahme: $\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsschluss: $\sum_{\nu=1}^{n+1} \nu = (\sum_{\nu=1}^{n} \nu) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \left(\frac{n}{2} + 1\right)(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. $\square$

Die Aufgabe, alle ganzen Zahlen von 1 bis n zu addieren, hat übrigens **Gauß** als neunjähriger Schüler mit $n = 100$ auf folgende Weise sehr schnell gelöst: Bezeichnet s_n diese Summe, so gelten die beiden Gleichungen

$$1 + 2 + \cdots + n = s_n,$$
$$n + (n-1) + \cdots + 1 = s_n.$$

Durch Addieren der beiden Summen erhält man

$$n(n+1) = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n-\mathrm{mal}} = 2s_n$$

und damit $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Bisweilen lässt man auch die Induktionsannahme als Zeile fort und führt gleich den Induktionsschluss aus. Auch hierfür ein Beispiel:

(2.21) $\quad \sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu = \frac{1-a^n}{1-a} \quad$ für $a \neq 1$

(die sogenannte **geometrische Reihe**). Beweis:

Induktionsanfang: $1 = \frac{1-a}{1-a}$.

Induktionsschluss: $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \sum_{\nu=0}^{n} a^\nu = \frac{1-a^n}{1-a} + a^n = \frac{1-a^n+a^n-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. $\square$

Bemerkung: Alle hier für die reellen Zahlen aufgestellten Regeln und Formeln beruhen auf den Eigenschaften (2.1) bis (2.5). Sie gelten daher auch für den Körper der **komplexen Zahlen**, der später eingeführt wird.

Abschließend bemerken wir noch

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_i b_k\right),$$

und für die Summe auf der rechten Seite schreibt man auch kürzer

$$\sum_{\substack{i=1,\cdots,m \\ k=1,\cdots,n}} a_i b_k.$$

Neben dem Summenzeichen verwendet man auch das **Produktzeichen**

(2.22) $\quad \prod_{i=k}^{l} a_i := a_k a_{k+1} \cdots a_l,$

lies „Produkt a_i über i von k bis l“.

Beispiel: $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

1.3 Anordnung und geometrische Deutung der reellen Zahlen

In der Analysis ist das Rechnen mit Ungleichungen ebenso wichtig wie das Rechnen mit Gleichungen. Das Rechnen mit Ungleichungen beruht auf den **Anordnungsaxiomen**. Man kann alles auf den Begriff der **positiven Elemente** zurückführen, d.h. auf die Axiome (3.1), (3.2) und (3.19).

(3.1) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Eigenschaften: a ist positiv, $a = 0$, oder $-a$ ist positiv (dann sagt man auch: a ist negativ).

(3.2) Sind a und b positiv, so auch $a + b$ und ab.

Definition (3.3): *Man sagt, a sei* **kleiner** *als b, wenn $b - a$ positiv ist, und man sagt dann auch, b sei* **größer** *als a. Man schreibt hierfür $a < b$ bzw. $b > a$. $a \leq b$ bzw. $b \geq a$ bedeutet: a ist kleiner als oder gleich b.*

Folgerung aus (3.1):
(3.4) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt stets genau eine der drei Relationen $a < b$, $a = b$ oder $b < a$.
Hier einige weitere Folgerungen aus (3.1) und (3.2):

(3.5) Aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$.
(3.6) Aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \leq b + d$.

In beiden Fällen gilt in der letzten Ungleichung „$<$“, falls dies in einer der beiden ersten steht.

(3.7) Aus $a \geq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \geq bc$. Aus $a > b$ und $c > 0$ folgt $ac > bc$. Setzt man stattdessen $c < 0$ voraus, so folgt $ac \leq bc$ bzw. $ac < bc$.

(3.8) Für alle $a \neq 0$ gilt $a^2 > 0$.

(3.9) Gilt $a > b > 0$, so ist $\frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0$.

Definition: *Der* **Absolutbetrag** *oder* **absolute Betrag** $|a|$ *einer Zahl* $a \in \mathbb{R}$ *ist gegeben durch*

$$(3.10) \qquad |a| := \begin{cases} a & \textit{falls } a > 0 \\ 0 & \textit{falls } a = 0 \\ -a & \textit{falls } a < 0. \end{cases}$$

Es ist also stets $|a| = \pm a$ und $|a| \geq 0$.
Für Beträge gelten die beiden Regeln

$$(3.11) \qquad |ab| = |a| \cdot |b|,$$
$$(3.12) \qquad |a+b| \leq |a| + |b|.$$

Die Gleichung (3.11) lässt sich leicht in jedem der vier möglichen Fälle für die Vorzeichen von a und b verifizieren. Die sogenannte **Dreiecksungleichung** (3.12) beweist man wie folgt:

$$|a+b| = \pm(a+b) = \pm a \pm b \leq |a| + |b|$$

(wobei wir (3.6) verwenden).

In (3.12) gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn gleichzeitig $a \geq 0$ und $b \geq 0$, oder aber wenn $a \leq 0$ und $b \leq 0$ gilt.

Ersetzt man in (3.12) nun b durch $b - a$, so erhält man $|b| \leq |b-a| + |a|$ und damit $|b| - |a| \leq |b-a|$. Vertauschen von a und b liefert nun $|a| - |b| \leq |b-a|$, und damit haben wir die Formel

$$(3.13) \qquad ||b| - |a|| \leq |b-a|.$$

Man kann die reellen Zahlen durch die Punkte einer Geraden veranschaulichen. Man wählt hierzu einen Null- und einen Einspunkt und trägt diese Strecke, die als Längeneinheit dient, nach beiden Seiten unbeschränkt ab. Dies ergibt die Elemente von $\mathbb{Z}$, also die ganzen Zahlen.

Im nächsten Schritt kann man dann die endlichen Dezimalbrüche darstellen: Man teile die Strecke zwischen n und $n+1$ ($n \in \mathbb{Z}$) in 10 Teile, verfahre mit jedem dieser Teile entsprechend usw.

Bei einem unendlichen Dezimalbruch c suche man für jedes $n \in \mathbb{N}$ zwei endliche Dezimalbrüche a_n, b_n mit der Differenz 10^{-n}, zwischen denen c liegt. Dies ergibt eine Folge ineinanderliegender Strecken mit c als dem eindeutig bestimmten gemeinsamen Punkt (man vergleiche unsere Ausführungen über Intervallschachtelungen auf Seite 15). Stets ist $|a|$ der Abstand des Punktes a vom Nullpunkt, und $|b-a|$ ist die Länge der Strecke mit den Endpunkten a und b.

Körper, in denen gewisse Elemente als positiv ausgezeichnet sind, so dass die Axiome (3.1) und (3.2) gelten, heißen **angeordnete Körper**. Beispiele für angeordnete Körper sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Wir werden im folgenden sehen, dass $\mathbb{Q}$ nicht gleich $\mathbb{R}$ ist, so dass die reellen Zahlen noch nicht eindeutig durch die bisherigen Eigenschaften charakterisiert sind:

(3.14) Es gibt keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.

Beweis: Wir nehmen an, es sei $x^2 = 2$ mit $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Dabei können wir annehmen, dass es sich um einen gekürzten Bruch handelt, dass also p und q teilerfremd sind.

Es ist dann $p^2 = 2q^2$, und daher ist p gerade, d.h. $p = 2r$ mit $r \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt $q^2 = 2r^2$, so dass auch q gerade ist. Das aber ergibt einen Widerspruch zu der Annahme, dass $\frac{p}{q}$ ein gekürzter Bruch ist. Die Zahl x kann also nicht rational sein! $\square$

Wir haben hier ein Beispiel eines **indirekten** Beweises gesehen. Der Methode des indirekten Beweises begegnet man in der Mathematik oft: Um eine Aussage zu beweisen, nimmt man die Negation der Aussage an (hier also die Existenz einer rationalen Zahl mit Quadrat 2) und leitet daraus einen Widerspruch her.

Wir werden später sehen: Ein wesentlicher Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ist, dass jede positive reelle Zahl eine (reelle) Quadratwurzel hat. Wir werden im folgenden Eigenschaften der Gesamtheit der reellen Zahlen betrachten, die der Gesamtheit der rationalen Zahlen nicht zukommen (Satz 3.19 gilt nicht innerhalb von $\mathbb{Q}$).

Es gibt wegen (3.5) unter endlich vielen reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ stets eine kleinste u und eine größte v, d.h. $u \leq a_i \leq v$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Man schreibt auch

$$u = \min\{a_1, \ldots, a_n\} = \min(a_1, \ldots, a_n),$$
$$v = \max\{a_1, \ldots, a_n\} = \max(a_1, \ldots, a_n).$$

Bei unendlich vielen reellen Zahlen braucht hingegen keine kleinste oder größte zu existieren; z.B. $\{-1, -2, -3, ...\}$ hat kein kleinstes Element.

Definition (3.15): *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt* **nach unten** *(bzw.* **nach oben***)* **beschränkt***, wenn es ein s_1 (bzw. s_2) $\in \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$s_1 \leq x \quad (\text{bzw. } x \leq s_2) \textit{ für alle } x \in M.$$

Die Zahl s_1 (bzw. s_2) heißt **untere** (bzw. **obere**) **Schranke** von M. Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt **beschränkt**, wenn es eine Zahl s gibt, so dass $|x| \leq s$ für alle Zahlen $x \in M$ gilt, d.h. wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist.

Bemerkung: Nicht jede nach unten (bzw. oben) beschränkte Menge reeller Zahlen enthält ein kleinstes (bzw. größtes) Element. Beispiel:

$$M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Offenbar gilt $0 < x \leq 1$ für alle $x \in M$. Aber die Menge M hat kein kleinstes Element. 0 ist dagegen eine untere Schranke von M, genauer: die größte untere Schranke von M.

Definition (3.16): *Eine Zahl t heißt* **untere** *(bzw.* **obere***)* **Grenze** *einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, wenn t untere (bzw. obere) Schranke von M ist und größer (bzw. kleiner) als jede andere untere (bzw. obere) Schranke von M ist. D.h.: t ist größte untere (bzw. kleinste obere) Schranke von M.*

Die untere Grenze t einer Menge M ist also wie folgt charakterisiert:
(3.17) $t \leq x$ für alle $x \in M$,
(3.18) $s \leq x$ für alle $x \in M \Rightarrow s \leq t$.
Analog kann man eine obere Grenze von M charakterisieren, wobei nur $\leq$ durch $\geq$ zu ersetzen ist.

Satz 3.19 *Jede nach unten (bzw. oben) beschränkte nichtleere Menge M von reellen Zahlen besitzt eine untere (bzw. obere) Grenze.*

Wir zeigen dies für den Fall der unteren Grenze. Dabei betrachten wir die reellen Zahlen vom „naiven“ Standpunkt aus, d.h. wir nehmen die Möglichkeit der Dezimalbruchentwicklung als gegeben an:
M hat eine untere Schranke a, d.h. es gilt $a \leq x$ für alle $x \in M$. Da M nichtleer ist, gibt es ein $b \in \mathbb{Z}$, $b > a$, das keine untere Schranke von M ist. Also gibt es auch ein $a_0 \in \mathbb{Z}$ mit $a_0 \leq x$ für alle $x \in M$ und mit der Eigenschaft, dass $a_0 + 1$ keine untere Schranke von M ist.

Nun teilen wir das Intervall von a_0 bis a_0+1 in 10 gleiche Teile und wählen als a_1 den letzten Teilpunkt, der noch untere Schranke von M ist. Dann ist $a_1 + 10^{-1}$ keine untere Schranke von M. Führt man diesen Prozess fort, so ergibt sich eine Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ unterer Schranken von M.

Jedes a_n ist ein abbrechender Dezimalbruch mit n Stellen hinter dem Komma, und a_{n+1} entsteht aus a_n durch Hinzufügen einer weiteren Stelle. Sei nun t der unendliche Dezimalbruch, der mit jedem der a_n bis zur n-ten Stelle übereinstimmt.

Wir behaupten: t ist untere Schranke von M. Anderenfalls gäbe es ein x in M mit $x < t$. Dann gilt $x < a_n$ für ein passendes n, was nicht möglich ist. Wir behaupten weiter: t ist sogar untere Grenze von M.

Ist s untere Schranke von M und $s > t$, so $s > a_n + 10^{-n}$ für ein passendes n. Dann ist $a_n + 10^{-n}$ untere Schranke von M. Dies aber ist ein Widerspruch zur Konstruktion von a_n. Die Annahme $s > t$ war also nicht richtig, d.h. es gilt $s \leq t$, und t ist tatsächlich untere Grenze von M. $\square$

Bemerkung: Die untere Grenze einer Menge M heißt auch **Infimum** von M und wird $\inf M$ geschrieben. Entsprechend heißt die obere Grenze von M auch **Supremum** von M, geschrieben $\sup M$.

Beispiel: Die Menge $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ hat das Infimum 0, wie wir im Beweis von (3.20) sehen werden.

Bei einem axiomatischen Aufbau der reellen Zahlen führt man zunächst die Körperaxiome (2.1)-(2.5) ein und fügt die Regeln (3.1) und (3.2) hinzu. Damit hat man dann insgesamt die Axiome eines **angeordneten Körpers**. Um die reellen Zahlen eindeutig zu charakterisieren, fehlt dann nur noch die Eigenschaft aus (3.19). Statt dieser kann man auch die **Archimedische Eigenschaft** (3.20) und dazu das sog. **Vollständigkeitsaxiom** verwenden. Ein anderes Axiom, das gleichwertig mit dem Archimedischen und dem Vollständigkeitsaxiom ist, ist das sog. **Dedekindsche Schnittaxiom**.

(3.20) Archimedische Eigenschaft:
Zu jeder reellen Zahl gibt es eine größere natürliche.

Beweis: OBdA (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) sei $x > 0$. Ist dann $x < 1$, so gilt für x die Behauptung. Also kann man oBdA sogar $x > 1$ voraussetzen. Es ist dann $0 < \frac{1}{x} < 1$. Also genügt es zu zeigen: Ist $0 < y < 1$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < y$.

Die Menge $M := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ hat wegen $\frac{1}{n} > 0$ nach (3.19) ein Infimum i. Wäre $i > 0$, so $2i > i$, und daher gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < 2i$. Dann aber wäre auch $\frac{1}{2n} < i$, und dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt $i = 0$. Für alle $y > i = 0$ existiert also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < y$, und daraus folgt die Behauptung. $\square$

Wir behandeln nun **Intervalle**.
Man nennt für reelle Zahlen $a < b$

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

ein **abgeschlossenes Intervall** und

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

ein **offenes Intervall**.

Entsprechend sind halboffene Intervalle definiert: $[a, b)$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x < b$, und ebenso ist $(a, b]$ die Menge aller x mit $a < x \leq b$.

Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $[a_0, b_0],\ [a_1, b_1],\ [a_2, b_2], \ldots$ heißt **Intervallschachtelung**, wenn gilt:

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : [a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$.
(ii) Die Längen der Intervalle werden beliebig klein, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n > 0$ mit $b_n - a_n \leq \varepsilon$.

(3.21) Satz: *Zu jeder Intervallschachtelung gibt es eine und nur eine reelle Zahl c, die allen Intervallen angehört.*

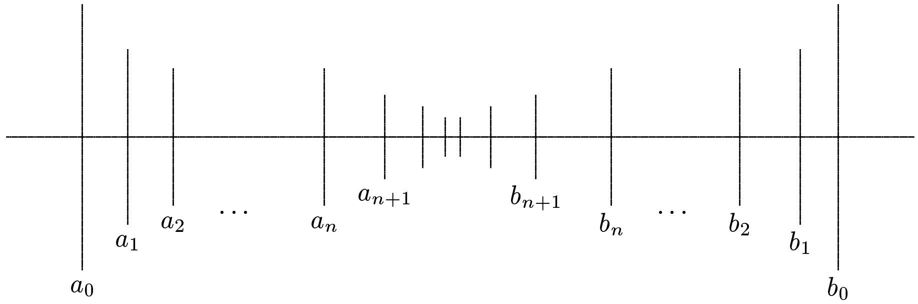

Abbildung 1.2: Intervallschachtelung

Beweis: Dass es nur eine solche Zahl c geben kann, ist leicht zu sehen. Falls nämlich eine weitere Zahl c' allen Intervallen angehört, würde aus $c \neq c'$ folgen $\varepsilon := \frac{1}{2}|c - c'| > 0$. Für ein genügend großes n gilt dann $b_n - a_n \leq \varepsilon$. Dann aber können nicht sowohl c wie c' im Intervall $[a_n, b_n]$ liegen, da dieses Intervall eine Länge $< |c - c'|$ hat. Damit ist die Eindeutigkeit von c gezeigt.

Um die Existenz zu zeigen, überlegt man sich Folgendes: Die Menge $M := \{b_0, b_1, b_2, \dots\}$ ist nach unten beschränkt. Jedes a_n ist eine untere Schranke von M. Nach (3.19) besitzt M eine untere Grenze, die wir c nennen wollen. Wegen (3.17) gilt $c \leq b_n$ und wegen (3.18) weiter $a_n \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also liegt c tatsächlich für alle $n \in \mathbb{N}$ in $[a_n, b_n]$. □

Eine wichtige Anwendung von Satz (3.19) ist es, zu zeigen, dass jede positive reelle Zahl eine Quadratwurzel besitzt.

(3.22) Satz: *Zu jedem $c \geq 0$ gibt es genau eine reelle Zahl $x \geq 0$ mit $x^2 = c$. Schreibweise: $x = \sqrt{c}$.*

Beweis: Sei a_0 die größte ganze Zahl, für die $a_0^2 \leq c$ gilt, und b_0 die nächst größte, so dass also $b_0^2 > c$ gilt. Nun teilen wir das Intervall a_0, b_0 in zehn gleiche Teile und bezeichnen mit a_1 den größten der Teilpunkte, für den $a_1^2 \leq c$ gilt, mit b_1 den nächst größeren, so dass also $b_1^2 > c$ gilt. Die Fortsetzung dieses Prozesses der Zehnteilung ergibt Zahlen a_n und b_n mit $a_n^2 \leq c \leq b_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die $[a_n, b_n]$ bilden eine Intervallschachtelung, und nach Satz (3.21) gibt es genau eine reelle Zahl x, die allen Intervallen angehört.

Wir zeigen, dass die $[a_n^2, b_n^2]$ eine Intervallschachtelung bilden. Die Längen $b_n^2 - a_n^2$ lassen sich wie folgt abschätzen: $b_n^2 - a_n^2 = (b_n + a_n)(b_n - a_n) \leq 2 \cdot b_0(b_n - a_n)$, da $b_n + a_n \leq b_0 + b_0$.

Ist $\varepsilon > 0$, so auch $\frac{\varepsilon}{2b_0} > 0$. Wegen $b_n - a_n \leq \frac{\varepsilon}{2b_0}$ für genügend große n ist dann $b_n^2 - a_n^2 \leq 2b_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2b_0} = \varepsilon$. Die $[a_n^2, b_n^2]$ bilden also in der Tat eine Intervallschachtelung.

Nach Konstruktion gilt $a_n^2 \leq c \leq b_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ebenso $a_n^2 \leq x^2 \leq b_n^2$. Nach (3.21) gilt daher $x^2 = c$. Mit x haben wir also eine Quadratwurzel aus c gefunden.

Andererseits kann nur eine positive Quadratwurzel aus c existieren: Wir nehmen an, x und y seien zwei verschiedene Zahlen ≥ 0 mit $y^2 = x^2 = c$ und $x < y$. Wegen (3.7) gilt dann $y^2 > yx > x^2$, also $y^2 \neq x^2$. Widerspruch! $\square$

Bemerkung: Die Konstruktion einer Quadratwurzel ist auch mit Intervallhalbierung möglich. Das hier geschilderte Verfahren hat den Vorteil, schneller zu konvergieren und numerisch anwendbar bei Berechnung der Dezimalstellen von $\sqrt{c}$ bei Näherungsrechnungen zu sein.

Hier einige Rechenregeln für Quadratwurzeln:

(3.23) $0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Wäre nämlich $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$, so wäre nach (3.7) $a = (\sqrt{a})^2 \geq \sqrt{a}\sqrt{b} \geq (\sqrt{b})^2 = b$: Widerspruch.

(3.24) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Denn mit $x^2 = a,\ y^2 = b$ sowie $x, y \geq 0$ ist $(xy)^2 = a \cdot b$ und $xy \geq 0$.

(3.25) $\sqrt{a^2} = |a|$.

Denn $|a|^2 = (\pm a)^2 = a^2$ und $|a| \geq 0$.

1.4 Ungleichungen

Die Dezimalschreibweise $\sqrt{2} = 1,414\ldots$ bedeutet $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$. In vielen Fällen hat man Näherungswerte zur Verfügung, etwa bei Messreihen in der Physik:

$$a = 4,5678 \pm 3 \cdot 10^4$$

bedeutet: $4,5675 \leq a \leq 4,5681$.

Wir unterscheiden: die **gesuchte Zahl** a, den **Näherungswert** a^* sowie den **Fehler** $\Delta a := a - a^*$. Liegt nun für eine weitere Zahl b ein Näherungswert b^* vor, so ist es oft wichtig zu wissen, wie sich der Fehler fortpflanzt, wenn aus a und b zusammengesetzte Ausdrücke gebildet werden.

Bei Addition und Subtraktion ist diese Frage leicht zu beantworten: Die Beträge der Fehler können sich höchstens aufaddieren (und unter Umständen auch gegenseitig aufheben). Schwieriger ist die Frage nach dem Fehler bei der Multiplikation der Werte a und b.

(4.1) $\quad \Delta(a \cdot b) = (a^* + \Delta a)(b^* + \Delta b) - a^* b^* = a^* \cdot \Delta b + b^* \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta b.$

Daraus folgt mit (3.11) und (3.12)

$$|\Delta(a \cdot b)| \leq |a^*| \cdot |\Delta b| + |b^*| \cdot |\Delta a| + |\Delta a| \cdot |\Delta b|.$$

Es stellt sich auch noch die Frage, wie sich der Fehler beim Übergang von a zu $\frac{1}{a}$ verändert. Es ist

$$\Delta\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^* + \Delta a} - \frac{1}{a^*} = \frac{-\Delta a}{a^* \cdot (a^* + \Delta a)},$$

daher

$$\left|\Delta\left(\frac{1}{a}\right)\right| = \frac{|\Delta a|}{|a^*| \cdot |a^* + \Delta a|}.$$

Durch welchen Ausdruck wäre hier $\frac{1}{|a^*+\Delta a|}$ nach oben abzuschätzen, d.h. $|a^* + \Delta a|$ nach unten?
Wir setzen voraus $|\Delta a| < |a^*|$. Dann gilt wegen (3.13) $|a^*+\Delta a| \geq |a^*|-|\Delta a| > 0$. Also ist

$$\frac{1}{|a^* + \Delta a|} \leq \frac{1}{|a^*| - |\Delta a|},$$

und man hat also insgesamt

$$\left|\Delta\left(\frac{1}{a}\right)\right| = \frac{|\Delta a|}{|a^*| \cdot |a^* + \Delta a|} \leq \frac{|\Delta a|}{|a^*| \cdot (|a^*| - |\Delta a|)},$$

falls $|\Delta a| < |a^*|$ gilt.

Wir kommen nun zu drei wichtigen Ungleichungen. Hierzu betrachten wir zur Vorbereitung **quadratische Polynome**.

Unter einem **Polynom** verstehen wir eine Abbildung $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von der Form $q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_k \in \mathbb{R}$.
Ein **quadratisches Polynom** ist von der Form $q(x) = ax^2 + 2bx + c$ mit $a \neq 0$. Indem man notfalls von q zu $-q$ übergeht, kann man $a > 0$ verlangen. Es ist dann $aq(x) = (ax + b)^2 + ac - b^2$.

(4.2) Für $q(x) = ax^2 + 2bx + c$ mit $a > 0$ gibt es genau eine der folgenden drei Möglichkeiten:
(i) $ac - b^2 > 0$
(ii) $ac - b^2 = 0$
(iii) $ac - b^2 < 0$.

Im Fall (i) gilt $q(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das Polynom q wird in diesem Fall **positiv definit** genannt.

Im Fall (ii) gilt $q(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{b}{a}\}$, und es ist $q\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$. Man nennt q in diesem Fall **positiv semidefinit**.

Im Fall (iii) nimmt q sowohl positive wie negative Werte an, und für $x = \frac{1}{a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right)$ gilt $q(x) = 0$. Das Polynom q heißt in diesem Fall **indefinit**.

Dies wird benutzt beim Beweis des folgenden Satzes:

Satz 4.3 (**Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**):

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)},$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $b_i = u \cdot a_i$ *mit* $u \in \mathbb{R}$ *oder* $a_i = v \cdot b_i$ *mit* $v \in \mathbb{R}$.

Beweis: Sei $q(x) := \sum_{i=1}^{n}(xa_i + b_i)^2$. Dann gilt

$$q(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Sind alle $a_i = 0$, so sind beide Seiten der Ungleichung Null, und es gilt $a_i = 0 \cdot b_i$ für alle i.

Sonst gilt $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$, d.h. der Koeffizient von $q(x)$ bei x^2 ist positiv. Dann können wir (4.2) anwenden: (iii) scheidet aus, da $q(x) = \sum_{i=1}^{n}(xa_i + b_i)^2$ nie negativ werden kann.

Wann gilt (ii)? Nur, wenn $q(x) = 0$ für einen Wert $x = -u$ ist. Dann ist $b_i = ua_i$ für alle i.

Im Fall (i) folgt $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 > 0$. Wegen $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ bzw. $\sqrt{a^2} = |a|$ folgt die behauptete Ungleichung mit „<". □

Hieraus ergibt sich eine wichtige Folgerung:

Korollar 4.4 (Dreiecksungleichung):

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Im Spezialfall $n = 1$ ergibt sich die uns bereits bekannte Ungleichung (3.12): $|a + b| \leq |a| + |b|$. Im Fall $n = 2$ erhält 4.4 folgende geometrische Deutung: Jede Seite eines Dreiecks ist kleiner als die Summe der beiden anderen. Deshalb der Begriff „Dreiecksungleichung".

Beweis von 4.4:
$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 = \sum_i {a_i}^2 + 2\sum_i a_i b_i + \sum_i b_i^2 \leq \sum_i a_i^2 + 2 \cdot |\sum_i a_i b_i| + \sum_i b_i^2 \leq \sum_i a_i^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)} + \sum_i b_i^2 = \left(\sqrt{\sum_i a_i^2} + \sqrt{\sum_i b_i^2}\right)^2$
(der vorletzte Schritt verwendet die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). Durch Wurzelziehen folgt nun die Behauptung. □

Bemerkung: Man überlegt sich: Gleichheit gilt in 4.4 genau dann, wenn an jeder Stelle der Ungleichungskette das Gleichheitszeichen steht. Dann aber muss erstens $\sum a_i b_i = |\sum a_i b_i|$, d.h. $\sum a_i b_i \geq 0$ sein, und zweitens in 4.3 Gleichheit gelten, also $b_i = ua_i$ oder $a_i = vb_i$ für alle i.

Sind a, b positive reelle Zahlen, so bezeichnet man die Zahl $\frac{1}{2}(a+b)$ als **arithmetisches Mittel** und $\sqrt{ab}$ als **geometrisches Mittel** der Zahlen a, b. Es gilt dann die wichtige

(4.5) Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel:
$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$.

Beweis: $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$, also $ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$. Daraus folgt durch Wurzelziehen die Behauptung. □

Wann gilt in (4.5) die Gleichheit? Genau dann, wenn $ab = \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2)$, d.h. $4ab = a^2 + 2ab + b^2$. Dies aber ist gleichbedeutend mit $0 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, d.h. mit $a = b$.

Allgemeiner kann man zeigen: Für $a_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ gilt

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

1.5 Komplexe Zahlen

Die Quadratwurzel einer rationalen Zahl liegt im Allgemeinen nicht in $\mathbb{Q}$. Der Wunsch, eine solche Quadratwurzel zu haben, ist eine mögliche Motivation bei der Erweiterung des Zahlbegriffs von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$.

Beim Rechnen in $\mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$ für alle x. Die Gleichung $x^2 = -1$ hat also keine Lösung in $\mathbb{R}$. Um eine Quadratwurzel aus -1 zu haben, kann man den Körper $\mathbb{R}$ erneut erweitern.

Man geht wie folgt vor: Man nimmt an, es gebe einen Körper, der das Gewünschte leistet. Aus dieser Annahme kann man dann die Eigenschaften dieses Körpers ableiten - ein in der Algebra oft übliches Verfahren.

(5.1) **Annahme:** Es existiere ein Körper $K \supseteq \mathbb{R}$, in dem die Gleichung $x^2 = -1$ lösbar ist.

Eine solche Lösung wollen wir i nennen (es ist dann $i \notin \mathbb{R}$). Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ liegt dann wegen der Körperaxiome $a + b \cdot i$ wieder in K.

Aus den Körperaxiomen für K folgt dann weiter

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

und

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

sowie

$$-(a+bi) = (-a) + (-b)i.$$

Sind a, b nicht beide Null, so ist $a^2 + b^2 > 0$, und es folgt $\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$.

Damit haben wir gezeigt: Die Menge $\{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ ist abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation, und es gibt in ihr stets ein additives und ein multiplikatives Inverses. Bei Annahme (5.1) ist damit gezeigt, dass diese Menge tatsächlich einen Körper bildet.

Bislang gingen wir von der Annahme (5.1) aus. Es gibt aber umgekehrt auch die Möglichkeit, von $\mathbb{R}^2$ auszugehen, also die komplexen Zahlen als **Zahlenpaare** einzuführen:

$$\mathbb{C} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Man definiert dann die Addition und Multiplikation wie folgt:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Man rechnet nach: Es gelten die Gesetze (2.1), (2.2) und (2.5). Man hat außerdem in $\mathbb{C}$ die neutralen Elemente (0,0) bezüglich der Addition und (1,0) bezüglich der Multiplikation. Es gilt (2.3), und man hat zu jeder komplexen Zahl das additive Inverse $-(a, b) = (-a, -b)$ und zu jeder von (0,0) verschiedenen komplexen Zahl das multiplikative Inverse

$$\frac{1}{(a, b)} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

Daher bildet $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ einen Körper. Man bezeichnet ihn kurz mit $\mathbb{C}$ und nennt ihn den **Körper der komplexen Zahlen**. Indem man die komplexe Zahl $(a, 0)$ mit der reellen Zahl a identifiziert, erhält man $\mathbb{R}$ als einen Unterkörper (Teilkörper) von $\mathbb{C}$.

Man rechnet leicht nach, dass die Gleichung $x^2 = -1$ eine Lösung in $\mathbb{C}$ hat, nämlich die komplexe Zahl

$$x = (0, 1) =: i$$

(und auch die komplexe Zahl $(0, -1) = -i$). Dann ist

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi,$$

so dass jedes Element von $\mathbb{C}$ in der Form $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ darstellbar ist. Wir werden ab jetzt wieder die Schreibweise $a + bi$ für komplexe Zahlen verwenden.

Wann sind zwei Elemente $a + bi$ und $c + di$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ gleich? Es ist $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, also

(5.3) $\quad a + bi = 0 \iff a = b = 0.$

Also sind $a + bi$ und $c + di$ genau dann gleich, wenn $a = c$ und $b = d$. Man veranschaulicht sich die komplexen Zahlen in der **Gaußschen Zahlenebene**,

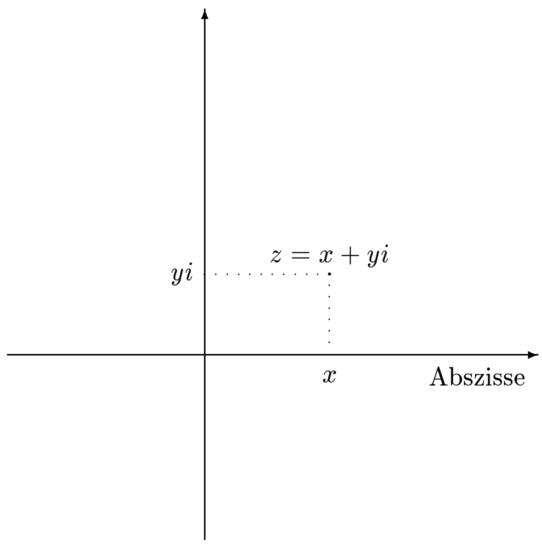

Abbildung 1.3: Die Gaußsche Zahlenebene

indem man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert. Die reellen Zahlen bilden einen Teilkörper von $\mathbb{C}$ (es ist ja $a = a + 0 \cdot i$) und werden auf der Abszisse aufgetragen.
Für eine komplexe Zahl $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ nennt man x den **Realteil** von z und schreibt $x = \mathrm{Re}(z)$. Man nennt y den **Imaginärteil** von z und schreibt $y = \mathrm{Im}(z)$.

(5.4) Definition: *Ist $z = a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ eine komplexe Zahl, so nennt man die reelle Zahl $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ den* **absoluten Betrag** *oder* **Absolutbetrag** *von z. Geometrisch gedeutet ist $|z|$ der Abstand des Punktes z vom Koordinatenursprung.*

Ist $z = a + bi$ eine komplexe Zahl, so bezeichnet man die komplexe Zahl

$$\overline{z} := a - bi$$

als die **zu z konjugiert komplexe** Zahl. Durch einfaches Nachrechnen bestätigt man die Rechenregeln

$$(5.5) \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{-z} = -\overline{z}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{1/z} = 1/\overline{z}.$$

In Worten: Die Operation des Konjugierens einer komplexen Zahl ist verträglich (= vertauschbar) mit der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division komplexer Zahlen.

Man kann nun den Absolutbetrag einer komplexen Zahl auch wie folgt darstellen:

$$(5.6) \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Es gilt dann $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ und $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; dies ist die Dreiecksungleichung 4.4 im Spezialfall $n = 2$.

Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so ist $|z| \neq 0$. Dann ist $\varepsilon := \frac{z}{|z|}$ eine komplexe Zahl vom Absolutbetrag 1, und wir haben folgende Aussage:

(5.7) Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ lässt sich als Produkt einer positiven reellen Zahl $r = |z|$ und einer Zahl ε mit $|\varepsilon| = 1$ schreiben.

Wie kann man die Rechenoperationen in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ geometrisch veranschaulichen? Man tut dies bei der Addition, indem man das aus der Physik bekannte Kräfteparallelogramm verwendet, also die Vektoren aneinanderhängt; es ist ja $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$. Mit anderen Worten: Die Addition mit einer komplexen Zahl $a+bi$ ist geometrisch gesprochen eine Parallelverschiebung, und zwar diejenige, die den Ursprung in (a, b) überführt.

Etwas schwieriger ist es bei der Multiplikation. Hier verwenden wir die Zerlegung aus (5.7): $z = r \cdot \varepsilon,\ r > 0,\ r \in \mathbb{R}$ sowie $|\varepsilon| = 1,\ \varepsilon \in \mathbb{C}$. Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl z besteht dann aus zwei Schritten:

1. Schritt: Multiplikation mit r. Dies ist eine Vergrößerung bzw. Verkleinerung im Maßstab $1 : r$ vom Nullpunkt aus.

2. Schritt: Multiplikation mit ε ($\varepsilon = c + di,\ c, d \in \mathbb{R},\ c^2 + d^2 = 1$). Dann geht der Punkt $P = (1, 0)$ in $P' = (c, d)$ über sowie $Q = (0, 1)$ in $Q' = (-d, c)$. Die Multiplikation mit ε bedeutet daher geometrisch eine Drehung um den Nullpunkt, die 1 in ε überführt.

Eine Multiplikation mit einer komplexen Zahl ist daher im Ergebnis eine **Drehstreckung**.
Wie steht es mit der Auflösung beliebiger algebraischer Gleichungen mit komplexen Koeffizienten? Man kann zeigen:

(5.8) Fundamentalsatz der Algebra:
Jede algebraische Gleichung $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ *mit reellen oder komplexen Koeffizienten* a_i ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) *hat mindestens eine komplexe Lösung. (Genauer: Es gibt, mit Vielfachheiten gerechnet, genau* n *komplexe Nullstellen.)*

Ein Beweis dieses bedeutenden Satzes wird gewöhnlich in der Vorlesung über Funktionentheorie geführt, nicht aber in der Analysis I oder II.

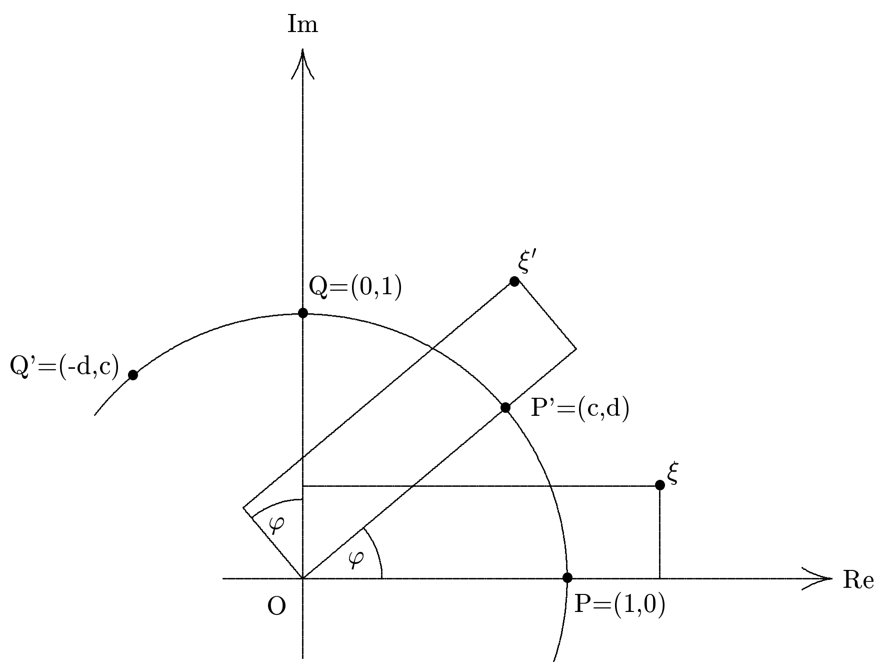

Abbildung 1.4: Bei Multiplikation mit einer komplexen Zahl vom Betrag 1 entsteht das Produkt durch eine Drehung um den Nullpunkt — hier geht beispielsweise der Punkt ξ in ξ' über und die Figur OPQ in OP'Q'.

1.6 Funktionen

(6.1) Definition: *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ (bzw. $D \to \mathbb{C}$) heißt* **reellwertige** *bzw.* **komplexwertige** *Funktion. D heißt der* **Definitionsbereich***, $B := \{f(x) : x \in D\}$ der* **Bildbereich** *von D. Man nennt $f(x)$ den* **Funktionswert** *von f an der Stelle x und x ein* **Argument** *von f. In dieser Vorlesung (Analysis I) ist meistens $D \subseteq \mathbb{R}$.*

Beispiele:

(6.2) Polynome: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$.
Man spricht für $D = \mathbb{R},\ a_i \in \mathbb{R}$ von einem **reellwertigen** und für $D = \mathbb{C},\ a_i \in \mathbb{C}$ von einem **komplexwertigen** Polynom.

(6.3) Rationale Funktionen: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ mit Polynomen g, h: ausgeschrieben $g(x) = a_n x^n + \ldots + a_0,\ h(x) = b_m x^m + \ldots + b_0,\ f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0}$. Dabei ist dann $D = \mathbb{R} \setminus N_h$ bzw. $D = \mathbb{C} \setminus N_h$, wobei N_h die Menge der (komplexen) Nullstellen des Nenners ist.[1]

(6.4) $f(x) = |x|,\ D = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(6.5) Folgen: $D = \mathbb{N}$, die Argumente sind dann also natürliche Zahlen. Man schreibt dann $f(n)$, wobei n in $\mathbb{N}$ liegt, meistens als a_n.

Manchmal ist die Vorschrift $y = f(x)$ in impliziter Form gegeben, z.B.:
(6.6) $x^2 + y^2 = 1$.

Man kann $y = f(x)$ durch Auflösung der Gleichung (6.6) erhalten. Man hat in diesem Fall eine „mehrdeutige Funktion“ bzw. zwei Funktionen: $f_1(x) = y = \sqrt{1 - x^2}$ bzw. $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Wir werden jedoch unter einer Funktion stets eine **eindeutige** Funktion verstehen.

Komplexwertige Funktionen $F : D \to \mathbb{C}$, mit D als Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, kann man wie folgt zerlegen: $F(x) = u(x) + iv(x)$, wobei u, v reellwertige Funktionen sind.

Polynome, also die Funktionen aus (6.2), haben eine Reihe wichtiger Eigenschaften. Man nennt für ein Polynom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_n \neq 0$ die Zahl n den **Grad** des Polynoms f und schreibt $n = \mathrm{grad}(f)$.

Man spricht im Fall $n = 0$ von einem **konstanten**, für $n = 1$ von einem **linearen**, für $n = 2$ von einem **quadratischen** und für $n = 3$ von einem **kubischen** Polynom. Das **Nullpolynom** $f \equiv 0$ hat (per definitionem) keinen Grad, aber wenn man von Polynomen vom Grad $\leq n$ spricht, wird stets das Nullpolynom dazugezählt.

[1] Eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ heißt auch **Nullstelle** von f.

Bemerkung: Summe, Differenz und Produkt zweier Polynome sind wieder Polynome. Dabei gelten die Regeln

$$\operatorname{grad}(f \pm g) \leq \max(\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g)),$$

$$\operatorname{grad}(f \cdot g) = \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(g).$$

Die **Division mit Rest** ist bei Polynomen in ganz entsprechender Weise möglich wie die Division mit Rest bei ganzen Zahlen: Seien

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0$$

zwei Polynome vom Grad n bzw. m und sei $m \leq n$. Dann ist

$$f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g(x)$$

ein Polynom mit einem Grad $n_1 < n$. Ist noch $n_1 \geq m$, so kann man das Verfahren fortsetzen und $c \cdot x^{n_1 - m} g(x)$ subtrahieren. Bei passend gewähltem c ergibt sich hierdurch ein Polynom vom Grad $n_2 < n_1$.
Nach endlich vielen Schritten erhält man das gewünschte Ergebnis

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

mit Polynomen q und r und mit $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(g)$.

Beispiel:

$$\begin{array}{l}
(x^5 - 1) : (x^2 - 1) \quad = \ x^3 + x, \quad \text{Rest } x - 1. \\
\underline{x^5 - x^3} \\
\qquad x^3 - 1 \\
\qquad \underline{x^3 - x} \\
\qquad\quad x - 1
\end{array}$$

Also ist $x^5 - 1 = (x^3 + x)(x^2 - 1) + (x - 1)$.

Wir betrachten nun den Spezialfall $g(x) = x - a$. Die Division mit Rest ergibt dann $f(x) = q(x)(x - a) + b$, und b ist in diesem Fall ein Polynom vom Grad < 1 und damit konstant. Indem man den Wert $x = a$ in das Polynom f einsetzt, erhält man nun $f(a) = b$. Ist $x = a$ eine Nullstelle von f, d.h. $f(a) = 0$, so folgt $b = 0$. Daher gilt folgender Satz:

Satz (6.7): *Genau dann ist die Zahl a eine Nullstelle des Polynoms $f(x)$, wenn sich $f(x)$ in der Form $q(x)(x - a)$ mit einem Polynom $q(x)$ schreiben lässt.*

Man nennt in diesem Fall das Polynom $f(x)$ durch $x - a$ **teilbar**.
Mit Satz 6.7 folgt der

Satz (6.8): *Ein vom Nullpolynom verschiedenes Polynom vom Grad n hat höchstens n verschiedene Nullstellen.*

Wir führen den **Beweis** mit Induktion.

Induktionsanfang: Ist das Polynom f vom Grad $n = 0$, so ist f konstant und hat damit keine Nullstellen.

Induktionsschluss: Sei f ein Polynom vom Grad $n + 1$. Sollte f keine Nullstellen haben, dann sind wir fertig.
Sonst gibt es eine (komplexe) Nullstelle a von f. Nach (6.7) kann $f(x)$ dann in der Form $q(x)(x-a)$ geschrieben werden, wobei q ein Polynom vom Grad n ist. Ist nun $b \neq a$, so folgt daraus:

$$b \text{ ist Nullstelle von } f \iff b \text{ ist Nullstelle von } q.$$

Aus der Induktionsannahme folgt: Es gibt höchstens n von a verschiedene Nullstellen von g und damit höchstens $n + 1$ verschiedene Nullstellen von f. Damit ist (6.8) bewiesen. □

Folgerung (6.9): Zwei Polynome f und g, deren Grade kleiner als n sind, und die für n verschiedene Werte von x übereinstimmen, sind identisch, d.h. ihre Koeffizienten stimmen überein.
Insbesondere sind zwei Polynome dann identisch, wenn sie an unendlich vielen Stellen übereinstimmen.

Zum **Beweis** genügt es, Satz (6.8) auf das Polynom $f - g$ anzuwenden. □

Man kann zeigen (was wir hier nicht ausführlich tun):
Satz (6.10): *Jedes komplexe Polynom f vom Grad n lässt sich in der Gestalt*

$$f(x) = c \cdot \prod_{k=1}^{n} (x - a_k)$$

schreiben. Dabei ist c eindeutig bestimmt, und die a_k sind eindeutig bis auf die Reihenfolge.

Der **Beweis** erfolgt mit dem Fundamentalsatz der Algebra (5.8) mittels vollständiger Induktion. □

In (6.10) können gewisse der a_k untereinander gleich sein. In diesem Fall tritt der Linearfaktor $x - a_k$ mehrfach auf. Die Zerlegung aus Satz (6.10) schreibt sich dann auch wie folgt:

$$f(x) = c \cdot \prod_{k=1}^{m} (x - b_k)^{n_k}$$

mit paarweise verschiedenen $b_1, \ldots, b_m$. Diese b_k sind dann genau die verschiedenen Nullstellen des Polynoms f. Für $k = 1, \ldots, m$ nennt man dann n_k die **Vielfachheit** der Nullstelle b_k. Es gilt offenbar $n = \sum_{k=1}^{m} n_k$. Wir haben damit den folgenden Satz, der in der Literatur gelegentlich auch anstelle von (5.8) als der Fundamentalsatz der Algebra bezeichnet wird:

Satz (6.11): *Ein komplexes Polynom vom Grad n hat genau n Nullstellen, wenn jede Nullstelle mit ihrer Vielfachheit gezählt wird.*

Im Reellen gilt Satz (6.11) nicht mehr unbedingt, d.h. ein reelles Polynom $f(x)$ kann im Allgemeinen nicht in reelle Linearfaktoren zerlegt werden. Ein Beispiel ist das reelle Polynom $f(x) = x^2 + 1$, das die beiden komplexen Nullstellen $\pm i$ hat, aber keine reelle Nullstelle.

Stattdessen gilt für reelle Polynome der folgende
Satz (6.12): *Jedes reelle Polynom lässt sich zerlegen in reelle Linearfaktoren und reelle quadratische Faktoren ohne Nullstellen.*

Beweis: Sei $f(x)$ ein reelles Polynom. Dann lässt sich f auch als komplexes Polynom ansehen, und wir haben nach Satz (6.11) eine Zerlegung

$$f(x) = c \cdot \prod_{k=1}^{m} (x - b_k)^{n_k}$$

mit $b_k \in \mathbb{C}$.
Da f reell ist, stimmt f mit dem konjugiert komplexen Polynom $\overline{f}$ überein. Daher gibt es für f die Zerlegung

$$f(x) = \overline{c} \prod_{k=1}^{m} (x - \overline{b_k})^{n_k}.$$

Mit jedem b_k ist folglich auch das konjugiert Komplexe $\overline{b_k}$ eine Nullstelle von f. Wir haben nur noch den Fall $b_k \notin \mathbb{R}$ zu betrachten. Fasst man $x - b_k$ mit $x - \overline{b_k}$ zusammen, so ergibt sich

$$(x - b_k)(x - \overline{b_k}) = x^2 - (b_k + \overline{b_k})x + b_k\overline{b_k} = x^2 - (2\text{Re } b_k)x + |b_k|^2,$$

also ein reeller quadratischer Faktor. Dies beendet den Beweis von Satz (6.12).
□

Kapitel 2

Grenzwerte und Stetigkeit

2.1 Zahlenfolgen

Unter einer **Folge** reeller (komplexer) Zahlen versteht man eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bzw. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Bei Folgen benutzt man häufig die Schreibweise a_n statt $f(n)$. Das werden wir im Folgenden stets tun.
Hier einige Beispiele von Folgen:
(1.1) $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, d.h. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

(1.2) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$, d.h. $1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \ldots$

(1.3) $a_n = \frac{n+1}{n}(-1)^{n+1}$, d.h. $2, -\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, \ldots$

(1.4) $a_n = \sqrt{n}$, d.h. $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \ldots$

(1.5) $a_1 := 1,\ a_2 := 1,\ a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 3$. Dies ist die berühmte Folge der **Fibonacci-Zahlen**; sie beginnt mit $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

(1.6) Man gibt einen Startwert $a_1 \in \mathbb{N}$ beliebig vor und definiert für $n \geq 1$:

$$a_{n+1} := \begin{cases} a_n/2 & \text{falls } a_n \text{ gerade} \\ 3a_n + 1 & \text{falls } a_n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Bei dieser Folge ist es ein bis heute ungelöstes Problem, ob es für jeden Startwert a_1 ein $n > 0$ mit $a_n = 1$ gibt (**Kakutani-Problem**; auch **Syrakus-Problem** genannt). Man hat bisher gezeigt, dass dies für alle Startwerte $a_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_1 \leq 7 \cdot 10^{11}$ der Fall ist.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **beschränkt**, wenn $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine beschränkte Menge ist. Beispiele beschränkter Folgen sind (1.1), (1.2) und (1.3). Dagegen ist (1.4) eine nicht beschränkte Folge.

(1.7) Definition: *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* **konvergent gegen den Grenzwert** a, *wenn gilt: Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $N(\varepsilon)$, *so dass* $|a_n - a| \leq \varepsilon$ *für* *alle $n \geq N(\varepsilon)$ ist. Man sagt dann auch, die Folge (a_n)* **konvergiert** *gegen die reelle oder komplexe Zahl a, und schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$.*

Bemerkung: Die Schreibweise $N(\varepsilon)$ deutet an, dass diese natürliche oder auch reelle Zahl N von ε abhängt. Man wird gewöhnlich $N(\varepsilon)$ um so größer wählen müssen, je kleiner ε ist.

Eine konvergente Folge mit dem Grenzwert 0 heißt **Nullfolge**.

Definition (1.8): *Eine Folge, die gegen keine Zahl konvergiert, heißt* **divergent**.

Ein Beispiel für eine Nullfolge ist (1.1); um dies zu sehen, braucht man für $\varepsilon > 0$ nur $N(\varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon}$ zu wählen. Für $n \geq N(\varepsilon)$ gilt dann $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)} = \varepsilon$. Auch (1.2) ist eine Nullfolge. Man wählt dann für $\varepsilon > 0$ z.B. $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}$. Damit gilt für alle $n \geq N(\varepsilon)$:

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N(\varepsilon)}} = \varepsilon.$$

Zur Definition (1.7) ist noch zu bemerken, dass der Grenzwert einer konvergenten Folge stets eindeutig bestimmt ist. Erst diese Eindeutigkeit rechtfertigt die Schreibweise $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ für den Grenzwert a der Folge (a_n):

(1.9) Konvergiert die Folge (a_n) gegen a und gegen b, so ist $a = b$.

Beweis: Wir nehmen an, a und b seien zwei verschiedene Grenzwerte. Es ist dann $|b - a| > 0$. Sei nun $\varepsilon = \frac{1}{3}|b - a| > 0$. Dann gibt es natürliche Zahlen N_1, N_2 mit

$$|a_n - a| \leq \varepsilon \text{ für } n \geq N_1, \quad |a_n - b| \leq \varepsilon \text{ für } n \geq N_2.$$

Für $n \geq \max(N_1, N_2)$ gilt dann $3\varepsilon = |b - a| \leq |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Daraus aber folgt $\varepsilon \leq 0$, und wir haben einen Widerspruch zur Voraussetzung. □

Analog beweist man:
(1.10) Seien $(a_n), (b_n)$ zwei Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $a \leq b$.

Achtung: Selbst wenn $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, braucht nicht $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ zu gelten. Ein Beispiel hierfür bilden die Folgen $a_n := 0$ und $b_n := \frac{1}{n}$, die beide denselben Grenzwert Null haben.

Beweis von (1.10): Wir nehmen an, es sei $a > b$. Sei dann $\varepsilon := \frac{1}{3}(a - b) > 0$. Wieder gibt es dann $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit:

(1.11) $\quad |a_n - a| \leq \varepsilon$ für $n \geq N_1, \quad |b_n - b| \leq \varepsilon$ für $n \geq N_2$.

Sei nun wieder $n \geq \max(N_1, N_2)$. Dann ist $3\varepsilon = a - b \leq \varepsilon + a_n - b \leq \varepsilon + b_n - b \leq 2\varepsilon$. Daraus folgt nun wieder $\varepsilon \leq 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Eine weitere Eigenschaft konvergenter Folgen, die sich auf analoge Art beweisen lässt, ist diese:

(1.12) Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, weiter $b_n \in \mathbb{R}$ und $|a_n| \le b_n$ für alle n. Dann gilt $|a| \le b$.

Beweis: Wir nehmen $|a| > b$ an. Mit $\varepsilon := \frac{1}{3}(|a| - b) > 0$ gilt dann wieder (1.11) mit geeigneten N_1, N_2. Daraus folgt für $n \ge \max(N_1, N_2)$: $3\varepsilon = |a| - b \le \varepsilon + |a_n| - b \le \varepsilon$ und damit $\varepsilon + b_n - b \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

(1.13) Konvergieren die reellen Zahlenfolgen (a_n) und (c_n) gegen denselben Grenzwert b und ist $a_n \le b_n \le c_n$ für alle n, so konvergiert (b_n) gegen b.

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ existieren N_1 und N_2, so dass $|a_n - b| \le \varepsilon$ für $n \ge N_1$ sowie $|c_n - b| \le \varepsilon$ für $n \ge N_2$. Sei $N = \max(N_1, N_2)$; dann ist $|b_n - b| \le \max(|a_n - b|, |c_n - b|) \le \varepsilon$ für $n \ge N$. $\square$

(1.14) Gilt $|a_n| \le b_n$ für alle n und ist $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, so auch $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis: Da (b_n) eine Nullfolge ist, kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ finden mit $|b_n| \le \varepsilon$ für $n \ge N$. Dann ist $|a_n| \le b_n \le \varepsilon$ für $n \ge N$. Daraus folgt direkt die Behauptung. $\square$

Beispiel: Wir betrachten die Folge

$$a_n := \frac{1}{n^2(2 - i^n)}.$$

Es ist $|2 - i^n| \ge |2| - |i^n| = 1$, also $|a_n| \le \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n} =: b_n$. Mit (1.14) folgt daraus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2(2 - i^n)} = 0.$$

Hier noch einige **Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten**:

(1.15) Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ (a, b aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und seien c, d aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} (ca_n + db_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n + d \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Insbesondere (mit $c = d = 1$ oder $c = 1,\ d = -1$) ist $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$.

Beweis: Es ist zunächst $|(ca_n + db_n) - (ca + db)| \le |ca_n - ca| + |db_n - db| = |c| \cdot |a_n - a| + |d| \cdot |b_n - b|$.
Ist nun $\varepsilon > 0$, so auch $\frac{\varepsilon}{2|c|+1} > 0$ und $\frac{\varepsilon}{2|d|+1} > 0$. Es gibt $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|c|+1}$ für $n \ge N_1$ sowie $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|d|+1}$ für $n \ge N_2$. Ist nun $n \ge N := \max(N_1, N_2)$, so folgt

$$|(ca_n + db_n) - (ca + db)| \leq |c| \cdot \frac{\varepsilon}{2|c|+1} + |d| \cdot \frac{\varepsilon}{2|d|+1} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

(1.16) Unter den Voraussetzungen von (1.15) konvergiert auch die Folge $(a_n \cdot b_n)$, und es gilt: $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$.

Zum Beweis dieser Behauptung zunächst ein
Hilfssatz (1.17): *Jede konvergente Folge (a_n) ist beschränkt.*

Beweis: Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge mit $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es dann also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq 1$ für alle $n \geq N$.
Es ist daher $|a_n| \leq |a| + 1$ für $n \geq N$. Die Menge der endlich vielen $|a_n|$ mit $n < N$ ist durch deren Maximum b beschränkt. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$|a_n| \leq c := \max(|a| + 1, b).$$

Damit ist (1.17) bewiesen.

Zum Beweis von (1.16) nehmen wir an, c sei wie im Beweis von (1.17) gegeben. Es folgt dann

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n b_n - a_n \cdot b| + |a_n \cdot b - ab| =$$

$$|a_n||b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \leq c \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b|.$$

Indem man nun analog zum Beweis von (1.15) fortfährt, erhält man die Behauptung. □

Wir interessieren uns nun für die Frage, inwieweit ein entsprechender Satz auch für Quotientenfolgen gilt: Falls (a_n) und (b_n) konvergente Folgen sind, wann gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$?
Hierzu ist sicherlich zunächst $b := \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ vorauszusetzen. Weiter ist der Fall zu berücksichtigen, dass manche der b_n Null sind, aber dies ist unter der Voraussetzung $b \neq 0$ keine besondere Einschränkung, wie wir nun sehen werden:

Behauptung: Gilt $b = \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, so können höchstens endlich viele der b_n Null sein.

Beweis: Sei $\delta := \frac{1}{2}|b| > 0$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $N_0 = N(\delta)$ mit der Eigenschaft: Für $n \geq N_0$ ist $|b_n - b| \leq \delta$.
Also: $|b_n| \geq |b| - |b_n - b| \geq 2\delta - \delta = \delta > 0$. Damit ist die Behauptung bewiesen, und für $n > N_0$ haben dann die Quotienten $\frac{a_n}{b_n}$ wirklich einen Sinn.

(1.18) Behauptung: Gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, so $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Ist dies gezeigt, so folgt mit (1.16):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Beweis: Wegen (1.16) genügt es, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ zu zeigen.

Für $n \geq N_0$ gilt: $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n-b|}{|b_n|\cdot|b|} \leq \frac{|b_n-b|}{\delta\cdot|b|}$.

Für $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein N_1, so dass $|b_n - b| \leq \varepsilon \cdot \delta \cdot |b|$ für $n \geq N_1$ gilt. Also: Ist $n \geq \max(N_0, N_1)$, so ist $\left|\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{\varepsilon\cdot\delta\cdot|b|}{\delta\cdot|b|} = \varepsilon$. Dies beendet den Beweis von (1.18). $\square$

Beispiel: Wir wollen $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n^2-n-1}$ berechnen.

Dabei ist (1.18) nicht direkt anwendbar, da Zähler wie Nenner für $n \to \infty$ divergieren. Aber eine Umformung liefert

$$\frac{3n^2+1}{2n^2-n-1} = \frac{3+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}.$$

Aus $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Durch Anwendung unserer Rechenregeln für die Grenzwerte folgt damit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n^2-n-1} = \frac{3}{2}.$$

Durch Anwendung von (1.16) und (1.18) mittels vollständiger Induktion folgt nun leicht:

(1.19) Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ sowie $\lim_{n\to\infty} b_n = b, \ldots, \lim_{n\to\infty} k_n = k$, so folgt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n + \ldots + k_n) = a + b + \ldots + k$ sowie $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n \cdot \ldots \cdot k_n) = a \cdot b \cdot \ldots \cdot k$.

Folgerung (1.20): Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot n^{-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!\cdot n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(k-1)}{n} = \frac{1}{k!}$.

Warnung: Sei $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$.

Hier ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$ von 1 verschieden. Die Folgerung (1.19) ist hier nämlich nicht anwendbar, da keine **feste** von n unabhängige Zahl von Faktoren vorliegt. Auch das Ergebnis wäre falsch, wie man so sieht:

$$a_n = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1} = 2.$$

Wichtig ist folgende Aussage:

(1.21) $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } |a| < 1 \\ 1 & \text{falls } a = 1, \end{cases}$

und für $|a| \geq 1,\ a \neq 1$ divergiert die Folge $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis: (i) Gilt $|a| < 1$, so ist $|a| = \frac{1}{1+b}$ mit $b = \frac{1}{|a|} - 1 > 0$. Der binomische Satz liefert dann

$$(1+b)^n = 1 + nb + \cdots > nb.$$

Für a gilt in diesem Fall $|a^n| = \frac{1}{(1+b)^n} < \frac{1}{nb}$. Die Folge $\left(\frac{1}{nb}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$ ist offenbar eine Nullfolge, und mit (1.14) folgt: auch $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

(ii) Ist $|a| \geq 1$, so auch $|a^n| \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, der Grenzwert $c := \lim_{n\to\infty} a^n$ existiere. Offenbar gilt dann $c \neq 0$.

Daraus folgt mit (1.18): $a = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{a^n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a^{n+1}}{\lim_{n\to\infty} a^n} = \frac{c}{c} = 1$, also $a = 1$. Für $a = 1$ ist aber $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ offenbar konvergent. □

(1.22) Ist $k \in \mathbb{Z}$ und $|a| < 1$, so $\lim_{n\to\infty} n^k \cdot a^n = 0$.

Beweis: (i) Ist $k \leq 0$, so $|n^k \cdot a^n| \leq |a|^n$, und daraus folgt mittels (1.21) und (1.14) bereits die Behauptung.

(ii) Ist $k > 0$ und $n \geq k+1$, so folgt mit $b := \frac{1}{|a|} - 1 > 0$: $(1+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} b^m > \binom{n}{k+1} b^{k+1}$. Daher ist

$$|n^k a^n| = \frac{n^k}{(1+b)^n} < \frac{1}{b^{k+1} \cdot \binom{n}{k+1} n^{-(k+1)}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Nach (1.20) ist $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} n^{-k} = \frac{1}{k!}$. Also ist auch $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k+1} n^{-(k+1)} = \frac{1}{(k+1)!}$. Daraus folgt mit unseren vorherigen Betrachtungen, dass $(n^k a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich eine Nullfolge ist. □

Beispiel: Es ist etwa $\lim_{n\to\infty} n^{1000} \cdot 0,99^n = 0$, obwohl dies beim Betrachten der ersten Folgenglieder in Erstaunen versetzen könnte.

Bei komplizierten Folgen ist es oft schwierig zu sehen, ob sie konvergieren und welches in diesem Fall ihr Grenzwert ist. Die folgende Definition ist oft hilfreich:

(1.23) Definition: *Eine reelle Zahlenfolge heißt* **monoton steigend** *(oder* **monoton zunehmend***), wenn für $n \geq m$ stets $a_n \geq a_m$ gilt. Ebenso heißt eine reelle Zahlenfolge* **monoton fallend** *oder* **monoton abnehmend***, wenn für $n \geq m$ stets $a_n \leq a_m$ gilt.*

(1.24) Konvergenzkriterium für monotone Folgen:
Jede beschränkte monotone Folge (a_n) konvergiert. Ist (a_n) monoton steigend (bzw. fallend) und beschränkt, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (bzw. $= \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$).

Wir führen den **Beweis** hier nur für monoton steigende Folgen.

Sei $s := \sup\{a_n\}$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $s - \varepsilon$ keine obere Schranke der Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. D.h.: es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N > s - \varepsilon$. Für $n \geq N$ ist dann $s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s$ und damit $|a_n - s| < \varepsilon$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also in der Tat gegen s. □

Wir betrachten nun etwas näher beschränkte, nicht konvergente Folgen. Ein Beispiel einer solchen Folge ist:

$$a_n = \frac{n+1}{n}(-1)^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Die Glieder mit geradem Index $2n$ haben die Gestalt $a_{2n} = -\frac{2n+1}{2n}$ und bilden daher eine gegen -1 konvergente Folge. Die Glieder mit ungeradem Index $2n-1$ haben die Gestalt $a_{2n+1} = \frac{2n}{2n-1}$ und bilden eine Folge, die gegen 1 konvergiert. In beiden Fällen haben wir eine **Teilfolge** der ursprünglichen Folge vorliegen.

Wir definieren: Eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine monoton steigende Folge $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen gibt, so dass $b_n = a_{i_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Eine Teilfolge einer Folge (a_n) ist also eine Folge, die aus (a_n) durch Weglassen von Folgengliedern entsteht. Es gilt der

(1.25) Satz: *Jede Teilfolge einer gegen den Grenzwert a konvergierenden Folge konvergiert ebenfalls gegen a.*

Zum **Beweis** genügt es, auf die Definition (1.7) zurückzugreifen. □

In unserem vorhergehenden Beispiel haben wir damit eine divergente Folge, da es zwei konvergente Teilfolgen mit den verschiedenen Grenzwerten -1 und $+1$ gibt.

(1.26) Definition: *Eine Zahl a heißt* **Häufungswert** *(oder* **Häufungspunkt***) einer Folge (a_n), wenn diese eine gegen a konvergente Teilfolge besitzt.*

(1.27) Bemerkung: Die Zahl a ist genau dann ein Häufungswert der Folge (a_n), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele n gibt, für die $|a_n - a| \leq \varepsilon$ ist.

Beweis: Ist (b_n) Teilfolge von (a_n) mit $\lim_{n\to\infty} b_n = a$ und ist $\varepsilon > 0$, so folgt: Es gibt ein N mit $|b_n - a| \leq \varepsilon$ für $n \geq N$. Es gibt dann also unendlich viele a_n mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

Umgekehrt nehmen wir an, zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$. Insbesondere ist dies dann für $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}$ der Fall: Es gibt ein $n =: i_1$ mit $|a_n - a| \leq 1$ und ein $n = i_2 > i_1$, so dass $|a_n - a| \leq \frac{1}{2}$.

So sehen wir induktiv: Ist i_{k-1} schon konstruiert, so existiert unter den unendlich vielen n, die $|a_n - a| \leq \frac{1}{k}$ erfüllen, ein $n =: i_k$, das $> i_{k-1}$ ist. Die Teilfolge (a_{i_n}) konvergiert dann gegen a, und wir sind fertig. □

Unser Beispiel $a_n = \frac{n+1}{n} \cdot (-1)^{n+1}$ zeigt, dass nicht jede beschränkte Folge konvergiert. Es gilt jedoch der wichtige

(1.28) Satz von Bolzano und Weierstraß: *Jede beschränkte Zahlenfolge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.*

Beweis: Die Folge (a_n) sei zunächst reell, also in einem Intervall $[c_0, d_0]$ enthalten. Wir halbieren dieses Intervall und erhalten dadurch (mindestens) eine Hälfte $[c_1, d_1]$, die unendlich viele Folgenglieder enthält. Indem man diesen Prozess des Halbierens fortsetzt, erhält man eine Intervallschachtelung $[c_k, d_k] \quad (k \in \mathbb{N})$ mit der Eigenschaft, dass jedes Intervall wieder unendlich viele Folgenglieder enthält. Sei nun a der gemeinsame Punkt aller Intervalle. Ist $\varepsilon > 0$ und $d_k - c_k \leq \varepsilon$, so ist das ganze Intervall $[c_k, d_k]$ in $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ enthalten. Also enthält $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ unendlich viele der a_n, so dass a ein Häufungspunkt der Folge ist.

Ist hingegen $a_n = u_n + iv_n$ komplex $(u_n, v_n \in \mathbb{R})$, so sind mit (a_n) auch (u_n) und (v_n) beschränkte Folgen. Wir können daher eine konvergente Teilfolge (u'_n) von (u_n) finden. Damit haben wir insgesamt eine Teilfolge $(a'_n) = (u'_n + iv'_n)$ von (a_n). Aus dieser kann man eine weitere Teilfolge $(a''_n) = (u''_n + iv''_n)$ so auswählen, dass (v''_n) konvergiert. Da nun auch (u''_n) konvergiert, ist auch insgesamt (a''_n) eine konvergente Folge, und wir sind fertig. □

Man verwendet bei der Untersuchung reeller Folgen auch den nächsten Begriff recht oft:

(1.29) Satz und Definition: *Sei (a_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann ist die obere (bzw. untere) Grenze der Menge der Häufungswerte von (a_n) selbst wieder Häufungswert. Sie heißt* **Limes superior** *(bzw.* **Limes inferior***) der Folge und wird mit*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\ a_n \quad \textit{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} \inf a_n$$

bezeichnet (man verwendet auch die Bezeichnung $\overline{\lim}\ a_n$ für den Limes superior und $\underline{\lim}\ a_n$ für den Limes inferior).

Wir führen den **Beweis** für den Limes superior. Sei (a_n) beschränkt und s die obere Grenze der Menge aller Häufungswerte. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es dann also einen Häufungswert $t > s - \varepsilon$ mit $t \leq s$.

Nach (1.27) gibt es unendlich viele n mit $|a_n - t| \leq t - (s - \varepsilon) = \varepsilon - (s - t)$. Da für diese n dann auch $|a_n - s| \leq |a_n - t| + |t - s| = |a_n - t| + s - t \leq \varepsilon$ gilt und $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt damit aus (1.27), dass s tatsächlich ein Häufungswert der Folge (a_n) ist. □

Achtung: Nicht jede Folge (a_n) mit der Eigenschaft, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N mit $|a_n - a_{n-1}| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt, ist konvergent. Mit anderen Worten: Eine Folge (a_n) mit $\lim_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$ braucht nicht konvergent zu sein.

Beispiel: Sei $a_n = \sqrt{n}$. Dann gilt:

$$|a_n - a_{n+1}| = \left| \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

und da die rechte Seite eine Nullfolge bildet, ist $\lim_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$. Aber $(a_n) = (\sqrt{n})$ ist selbst keine konvergente Folge.

Es gilt aber die folgende wichtige notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung:

(1.30) (Cauchysches Konvergenzkriterium:)
Eine Zahlenfolge (a_n) konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ gibt, so dass $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Beweis: (i) Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann folgt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein N mit $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Sind dann $n, m \geq N$, so folgt $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(ii) Für die umgekehrte Richtung nehmen wir $\varepsilon = 1$ an. Es gibt dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| \leq 1$ für alle $n, m \geq N$. Daher ist $|a_n| \leq |a_m| + 1$ für $m, n \geq N$. Lassen wir nun m fest und n variieren, so erhalten wir die Beschränktheit der Folge (a_n). Nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß hat (a_n) einen Häufungspunkt a.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben und N so groß, dass $|a_n - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für $n, m \geq N$. Weil a Häufungspunkt ist, gibt es dann ein $m \geq N$ mit $|a_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Daraus folgt

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_m| + |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für $n \geq N$. Dies beendet den Beweis von (1.30). □

2.2 Unendliche Reihen

Ist (a_n) eine Folge, so bezeichnet man die Folge $(s_n) := (\sum_{i=1}^n a_i)$ als die **unendliche Reihe mit dem k-ten Glied a_k.** Ein bekanntes Beispiel hierfür ist die **unendliche geometrische Reihe**:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a},$$

die nach (1.21) für $|a| < 1$ konvergiert mit dem Grenzwert $\frac{1}{1-a}$. In diesem Fall schreibt man für die Reihe bzw. ihren Grenzwert auch

(2.1) $\quad \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \quad$ für $|a| < 1$.

(2.2) Definition: *Die unendliche Reihe mit dem k-ten Glied a_k heißt* **konvergent mit dem Grenzwert** s, *in Zeichen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s,$$

wenn die Folge der Teilsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ gegen s konvergiert. Hat die Folge s_n keinen Grenzwert, so heißt die unendliche Reihe **divergent**.

Summiert man nicht von $k = 0$ ab, sondern ab $k = m$, so verwendet man die Schreibweise $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$.

Beispiel: Die reelle Zahl $a = 0, a_1 a_2 \ldots$ sei ein unendlicher Dezimalbruch mit a_n an der n-ten Stelle hinter dem Komma. Dann ist

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}.$$

Denn zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N = N(\varepsilon)$ mit $10^{-N} < \varepsilon$. Für $n \geq N$ beginnt die Dezimalbruchentwicklung von $a - \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 10^{-k}$ frühestens an der $(n+1)$-ten Stelle und ist damit kleiner als $10^{-N} < \varepsilon$.

Viele Konvergenzkriterien, unter ihnen die nächsten beiden, übertragen sich direkt von Folgen auf Reihen:

(2.3) Cauchysches Konvergenzkriterium für unendliche Reihen:
Die unendliche Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ gibt, so dass

$$\left| \sum_{i=m}^{n} a_i \right| \leq \varepsilon \quad \textit{für } n \geq m > N.$$

(2.4) Konvergenzkriterium für Reihen mit positiven Gliedern:
Die unendliche Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ mit nichtnegativen Gliedern a_i konvergiert genau dann, wenn die Folge der Teilsummen beschränkt ist.

Beispiele:
(2.5) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Denn es ist $\frac{1}{n^2} > 0$ und $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \sum_{n=2}^{m} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots = 2 - \frac{1}{m} \leq 2$. Die Folge der Teilsummen ist also beschränkt, und daraus folgt die Konvergenz unserer Reihe.

(2.6) Die **harmonische Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Partialsummen (=Teilsummen)

$$s_{2^{k+1}} = \sum_{n=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{k} \left(\sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} \frac{1}{n} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n}\right).$$

Die Summe jeder Klammer ist $> \frac{1}{2}$, und es folgt

$$s_{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{k}{2}.$$

Die Folge der Teilsummen ist also unbeschränkt, d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. Wir haben hier also ein Beispiel einer Reihe gesehen, die divergiert, obwohl die Folgenglieder die Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ erfüllen.

(2.7) Leibnizsches Konvergenzkriterium: *Ist $(a_n)_{n\geq 0}$ monoton fallend und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$. Ihr Grenzwert liegt zwischen den Werten zweier aufeinanderfolgender Teilsummen s_{n-1} und s_n.*

Beweis: Es wird gezeigt, dass das Cauchysche Konvergenzkriterium für die Folge der Teilsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ erfüllt ist.

Es gilt: $s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \cdots$ sowie $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots$ sowie $s_{2n-1} \leq s_{2n}$. (Für $m, n > N$ liegen also s_m und s_n zwischen s_{N-1} und s_N.) Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N, so dass $|s_N - s_{N-1}| = |a_N| \leq \varepsilon$ gilt. In diesem Fall folgt $|s_n - s_m| \leq |s_N - s_{N-1}| \leq \varepsilon$ für $n, m \geq N$. Mit dem Cauchy-Kriterium folgt damit die Behauptung. □

Beispiel: Die **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

ist konvergent.

(2.8) Majoranten- (oder Vergleichs-)kriterium:
Seien $a_n \geq 0$ und sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Es gebe ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n| \leq a_n$ für alle $n \geq N_0$. Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **Majorante** *zu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein N_1 mit $\sum_{k=m}^{n} a_k \leq \varepsilon$ für $n \geq m \geq N_1$. Ist $m \geq N_0$ sowie $m \geq N_1$, so folgt

$$\left|\sum_{k=m}^{n} b_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |b_k| \leq \sum_{k=m}^{n} a_k \leq \varepsilon.$$

□

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ist konvergent. Denn es gilt $\left|\frac{1}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ für alle n, und von der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ wissen wir bereits, dass sie konvergiert. Umgekehrt ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ eine divergente Reihe, weil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert und $\left|\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle n gilt.

(2.9) Quotientenkriterium:
Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern a_n. Es gebe ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ für $n \geq N$ ist. Dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
Dies gilt insbesondere in dem Fall, dass es für eine Konstante $0 < q < 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \leq q$ für $n \geq N$.

Beweis: Ist $n \geq N$, so ist

$$|b_n| = |b_N| \cdot \left|\frac{b_{N+1}}{b_N}\right| \cdot \left|\frac{b_{N+2}}{b_{N+1}}\right| \cdots \left|\frac{b_n}{b_{n-1}}\right| = |b_N| \prod_{k=N}^{n-1} \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right|$$

$$\leq |b_N| \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{|b_N|}{a_N} \cdot a_n.$$

Mit (2.8) folgt daraus die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Speziell mit $a_n = q^n$ folgt damit auch die zweite Behauptung. □

(2.10) Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert für jedes $x \in \mathbb{C}$.

Beweis: Für $x = 0$ ist die Behauptung klar. Ist $x \neq 0$, so $\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|}{n+1}$. Mit $q := \frac{1}{2}$ und $n > 2|x|$ gilt aber $\frac{|x|}{n+1} < q$, und die Behauptung folgt damit aus (2.9). □

(2.11) Satz: *Gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq 0$, so folgt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

falls diese beiden Reihen konvergieren. Gilt für komplexe a_n: $|a_n| \leq b_n$, so folgt

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

falls $\sum_n b_n$ konvergiert.

Satz 2.11 folgt direkt aus (1.10) und ist nützlich zur näherungsweisen Berechnung unendlicher Reihen.

Beispiel 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Es ist dann

$$\frac{1}{6} = \sum_{n=6}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \leq \sum_{n=6}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5},$$

und daraus folgt $1,62 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1,67$.

Beispiel 2: Wir definieren $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =: e$, die sogenannte **Eulersche Zahl**. Die Zahl e tritt vor allem als Basis der Exponentialfunktion und der natürlichen Logarithmen auf.

Da unsere Reihe sehr schnell konvergiert, ist sie zur numerischen Berechnung von e sehr gut geeignet:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

$$\frac{1}{7!} \leq \sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{7!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = \frac{1}{7!} \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7! \cdot 7}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 1/2! &= 2,5, \\ 1/3! &= 0,16666..., \\ 1/4! &= 0,04166..., \\ 1/5! &= 0,00833..., \\ 1/6! &= 0,00138..., \end{aligned}$$

und durch Summation folgt $e > 2,71803$.

Andererseits gilt: $\frac{1}{7!} > 0,00019$ sowie $\frac{8}{7! \cdot 7} < 0,00023$. Zudem ist leicht zu sehen, dass in der obigen Rechnung die Rundungsfehler höchsten 4 Einheiten in der letzten Stelle betragen. So ergibt sich

$$2,7182 < e < 2,7183.$$

Dabei wurde bereits der folgende Satz benutzt:

(2.12) *Ist $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergent, so konvergiert auch $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ für alle $n > m$. Es gilt stets $\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{\infty} a_k$.*

Dies folgt direkt aus der Regel (1.15). Ebenso folgt:

(2.13) *Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist dies auch $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + db_n)$, und zwar mit dem Grenzwert*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + db_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n + d \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Vorsicht: Nicht alle Schlüsse, die man von endlichen Reihen her kennt, lassen sich auf unendliche Reihen übertragen. Wir werden nun anhand von einigen Beispielen sehen, dass bei zu sorglosem Umgang mit unendlichen Reihen Fehler auftreten können:

(i) Folgender Schluss ist nicht erlaubt:

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = (1-1)+(1-1)+\cdots = 1-1+1-1+\cdots = 1+(1-1)+(1-1)+\cdots = 1.$$

Der Fehler liegt darin, dass man bei konvergenten Reihen im allgemeinen keine Klammern weglassen darf: Durch Weglassen von Klammern kann man unter Umständen aus einer konvergenten eine divergente Reihe erhalten.

(ii) Die Umordnung der Glieder ist ohne Zusatzvoraussetzungen nicht erlaubt. Beispiel:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

ist nach dem Leibnizkriterium eine konvergente Reihe. Der Grenzwert s liegt offenbar zwischen 1 und $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, und daher gilt $s \neq 0$. (Bemerkung: Es ist $s = \ln 2$.)
Es ist dann

$$\begin{aligned} s + \frac{1}{2}s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \cdots\right) \\ &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots \end{aligned}$$

Man überlegt sich, dass hier nun für $s + \frac{1}{2}s$ eine Reihe vorliegt, in der jedes Glied der Reihe für s wieder vorkommt (und umgekehrt) - nur in anderer Anordnung. Man könnte daraus den falschen Schluss $s + \frac{1}{2}s = s$ ableiten.

Der Fehler liegt in folgendem: Man darf bei einer unendlichen Reihe die Anordnung der Glieder nicht beliebig verändern! Man darf dies allerdings unter einer gewissen Zusatzvoraussetzung, nämlich im Fall der **absoluten Konvergenz** der ursprünglichen Reihe.

(2.14) Definition: *Die unendliche Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *heißt* **absolut konvergent**, *wenn* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergiert.*

Wir werden nun zeigen: Unter der Voraussetzung der absoluten Konvergenz gelten die Analoga der für endliche Summen gültigen Assoziativ- und Kommutativgesetze.

Satz (2.15): *Die unendliche Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ *sei absolut konvergent. Die Glieder* a_n *seien auf unendlich viele unendliche Reihen (oder endliche Summen) verteilt derart, dass jedes Glied* a_n *in genau einer der Teilreihen auftritt, und zwar genau einmal. Dann konvergieren alle diese Teilreihen absolut gegen gewisse Grenzwerte* $s_1, s_2, \ldots,$ *und die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ *konvergiert auch absolut mit dem Grenzwert* a.

Beweis: Die Summen $\sum_{n=1}^{m} |a_n|, \ m \in \mathbb{N}$ sind beschränkt. Damit folgt: Jede endliche Summe von Summanden $|a_n|$ ist beschränkt, dies gilt insbesondere für die Abschnittsummen der Teilreihen. Nach (2.4) konvergieren daher die Teilreihen absolut.

Zu $\varepsilon > 0$ existiert also stets ein k mit $\sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon$. Damit folgt: Jede endliche Summe von Gliedern a_n, in der $a_1, a_2, \dots$ bis a_k vorkommen, unterscheidet sich von a höchstens um ε.

Nun wählen wir m groß genug, etwa so, dass $m \geq N$ und dass alle $a_1, \dots, a_k$ in den ersten m Teilreihen vorkommen.

Sei $s_{n,i}$ die Summe der ersten i Glieder der n-ten Teilreihe. Weiter seien $i(1), \dots, i(m)$ Zahlen, so groß, dass jedes der Glieder $a_1, \dots, a_k$ in einer der Teilsummen $s_{1,i(1)}, \dots, s_{m,i(m)}$ vorkommt. Daraus folgt zunächst

$$\left| \sum_{n=1}^{m} s_{n,i(n)} - a \right| \leq \varepsilon.$$

Wir halten nun m fest und lassen für jedes n stets $i(n)$ gegen ∞ gehen (bzw. $i(n)$ sei Anzahl der Summanden von s_n, falls es sich um eine endliche Summe handelt).

Damit folgt: $s_{n,i(n)}$ konvergiert gegen s_n (oder wird gleich s_n im Fall endlicher Summen). Wir haben damit

$$\left| \sum_{n=1}^{m} s_n - a \right| \leq \varepsilon.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ ist daher konvergent mit dem Grenzwert a. Indem wir denselben Schluss auf $\sum_n |a_n|$ anstelle auf $\sum_n a_n$ anwenden, erhalten wir die absolute Konvergenz der Teilreihen mit den Grenzwerten s'_n und die Eigenschaft $|s_n| \leq s'_n$. Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} s'_n$ eine Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$, und wir sind damit fertig. □

Ein wichtiger Spezialfall von Satz (2.15) besteht darin, dass jede Teilreihe nur aus einem einzigen Summanden besteht. Dann erhalten wir den

(2.16) Satz: *Konvergiert eine unendliche Reihe absolut, so konvergiert auch jede durch Umordnung der Glieder entstehende Reihe absolut mit demselben Grenzwert.*

Dabei ist eine **Umordnung** eine bijektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, und Satz (2.16) besagt: Für absolut konvergente Reihen gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}.$$

Wir betrachten nun **Doppelreihen**, d.h. wir interessieren uns für den Fall einer Reihe der Form $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{m,n}$.

Wenn die aus den Zahlen $a_{m,n}$ in **irgendeiner** Anordnung gebildete unendliche Reihe **absolut** konvergiert, dann folgt nach (2.16): Die Reihe konvergiert auch für jede andere Anordnung, und zwar mit demselben Grenzwert. Dieser von der Anordnung unabhängige Grenzwert wird mit

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}$$

bezeichnet. Zum Beispiel ist dann $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}\right)$. Dasselbe gilt bei Vertauschung von Reihen und Spalten, und wir haben damit den

(2.17) Satz: *Konvergiert $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}$ absolut, so ist*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}\right).$$

Weiter gilt der

(2.18) Satz: *Konvergieren $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$ absolut, so konvergiert die Doppelreihe*

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i b_k$$

absolut mit dem Grenzwert ab.

Beweis: Wir wählen $M, N \in \mathbb{N}$ so, dass $\sum_{i=1}^{m} |a_i| \leq M$ und $\sum_{k=1}^{n} |b_k| \leq N$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt. Jede endliche Summe $\sum_{i,k} |a_i b_k|$ ist daher durch $M \cdot N$ beschränkt, und daraus folgt: $\sum_{i,k} a_i b_k$ ist absolut konvergent.
Aus (2.17) folgt nun:

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i b_k = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_i b_k\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right),$$

und wir sind fertig. □

Unter den Reihen sind die **Potenzreihen** besonders wichtig: sie sind von der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit a_n aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Beispiele: (i) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ist eine Potenzreihe, von der wir bereits festgestellt haben, dass sie für $|x| < 1$ gegen $\frac{1}{1-x}$ konvergiert.

(ii) Für beliebige x aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ eine konvergente Potenzreihe.

Wir werden die Potenzreihen später genauer untersuchen. Hier nun noch ein wichtiger Satz über Multiplikation zweier Potenzreihen:

(2.19) Cauchy-Produkt konvergenter Potenzreihen:
Für alle x, für welche die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ absolut konvergieren, gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$.

Zum Beweis: Multipliziert man nach (2.18) aus und fasst man die Glieder mit gleicher Potenz von x zusammen, so erhält man wegen (2.15) gerade (2.19).

Beispiel: Es ist $\frac{1}{(1-x)^2} = (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ für $|x| < 1$.

2.3 Stetige Funktionen

Unsere bisherigen Betrachtungen über konvergente Folgen sind sehr nützlich, um den wichtigen Begriff der **stetigen Funktionen** einzuführen. Die meisten Funktionen, denen man in der Analysis begegnet, sind stetig.

(3.1) Definition: *Eine Funktion f heißt* **stetig in** $x_0 \in D$, *wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ ist für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| \leq \delta$.*
f heißt **stetig**, wenn f in jedem Punkt $x \in D$ stetig ist.

Diese Definition besitzt eine große Analogie zum Grenzwertbegriff bei Folgen. Dies wird durch das Folgende noch verdeutlicht:

(3.2) Definition: *Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Punkte $x \in D$ mit $|x - a| \leq \varepsilon$, so schreibt man*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - b| \leq \varepsilon$ gilt für alle $x \in D$ mit $|x - a| \leq \delta$.

Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ und beschränkt man sich auf $x > a$ (bzw. $x < a$), so schreibt man

$$\lim_{x \to a+} f(x) = b \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to a-} f(x) = b.$$

und spricht in diesem Fall von einem **rechtsseitigen** *bzw.* **linksseitigen** *Grenzwert. Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben (bzw. nach unten) unbeschränkt, so schreibt man*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = a,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein y gibt, so dass

$$|f(x) - a| \leq \varepsilon \quad \textit{für alle } x \in D \cap [y, \infty) \quad \text{bzw. } x \in D \cap (-\infty, y].$$

Dabei ist $[y, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq y\}$ bzw. $(-\infty, y] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq y\}$.

Bemerkung: Ist $D = \mathbb{N}$, so kann man $f(n) = a_n$ als Zahlenfolge interpretieren. Dann stimmt

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = a$$

mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ überein.

Analoge Rechenregeln:

$$\begin{aligned} (3.3) \qquad \lim(f(x) \pm g(x)) &= \lim f(x) \pm \lim g(x), \\ \lim(f(x) \cdot g(x)) &= \lim f(x) \cdot \lim g(x), \end{aligned}$$

falls beide Grenzwerte auf der rechten Seite existieren. Dabei ist unter dem Limeszeichen ein und dieselbe Vorschrift zu setzen, z.B. $x \to a$, $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$.
Ist ferner $\lim g(x) \neq 0$, so gilt (und existiert) auch

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

Bemerkung: Der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ braucht hier nicht für alle x definiert zu sein. Es genügt, dass er für alle genügend nahe bei a liegenden x definiert ist, bzw. für genügend große (bzw. kleine) x.

Bemerkung: Genau dann ist die Funktion f im Punkt x stetig, wenn gilt:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Aus (3.3) folgt:

(3.4) Sind f, g an der Stelle a stetig, so sind dies auch $f \pm g$ und $f \cdot g$; ebenso $\frac{f}{g}$, falls $g(a) \neq 0$ gilt.

(3.5) Ein Polynom ist überall stetig, eine rationale Funktion überall dort, wo der Nenner nicht verschwindet.

Ein entsprechender Satz gilt auch für die Komposition von Funktionen:

(3.6) Umfasst der Definitionsbereich der Funktion f den Bildbereich der Funktion g und gilt

$$\lim_{x\to a} g(x) = b, \quad \lim_{y\to b} f(y) = c,$$

so ist $\lim_{x\to a} f(g(x)) = c$. Analoge Regeln gelten für $x \to a+$ bzw. $x \to a-$, ebenso für $x \to \pm\infty$.

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ existiert nach Voraussetzung ein $\eta > 0$ mit $|f(y) - c| \leq \varepsilon$ für $|y - b| \leq \eta$. Zu $\eta > 0$ existiert aber auch ein $\delta > 0$ mit $|g(x) - b| \leq \eta$ für $|x - a| \leq \delta$. Daraus folgt, was wir benötigen:

$$|f(g(x)) - c| \leq \varepsilon \quad \text{für } |x - a| < \delta.$$

□

(3.7) Folgerung: Ist g an der Stelle a und f an der Stelle $g(a)$ stetig, so ist dies auch $f \circ g$ an der Stelle a.

Anwendung: Gegeben sei

$$f(x) = \frac{a_m x^m + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0} = \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k x^k}{\sum_{j=0}^{n} b_j x^j},$$

also eine rationale Funktion. Wir stellen uns die Aufgabe, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ zu berechnen.

(i) Zunächst gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.
(Denn: Für $\varepsilon > 0$ ist $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$, sobald $x > \frac{1}{\varepsilon}$ ist.)

(ii) Gilt $m \leq n$ und $b_n \neq 0$, so ist

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m \left(\frac{1}{x}\right)^{n-m} + \ldots + a_0 \left(\frac{1}{x}\right)^n}{b_n + \ldots + b_0 \left(\frac{1}{x}\right)^n} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } m < n \\ \frac{a_m}{b_n} & \text{falls } m = n. \end{cases}$$

(iii) Gilt $m > n$, so ist für $g(x) := \frac{b_n x^n + \ldots + b_0}{a_m x^m + \ldots + a_0}$ der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. In diesem Fall hat $f(x)$ für $x \to \infty$ keinen Grenzwert!

Wir betrachten nun Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, wobei I ein Intervall $\subseteq \mathbb{R}$ ist. a sei stets ein innerer Punkt des Intervalls I.

Wie können Unstetigkeitsstellen a des Intervalls I aussehen? Der einfachste Fall einer Unstetigkeitsstelle a innerhalb I ist folgender: Es existieren die beiden Grenzwerte $\lim_{x\to a+} f(x)$ und $\lim_{x\to a-} f(x)$, stimmen auch überein, sind aber von $f(a)$ verschieden.

Gilt $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) \neq f(a)$, so nennt man a eine **hebbare** Unstetigkeitsstelle von f.

Beispiel: Es sei

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (1-x^2)^n = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } -\sqrt{2} < x < 0 \text{ und } 0 < x < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Diese Funktion hat 0 als hebbare Unstetigkeitsstelle.

Unser nächster Fall besteht in folgendem: Beide Grenzwerte $\lim_{x\to a+} f(x)$ und $\lim_{x\to a-} f(x)$ existieren, aber sie stimmen nicht überein. In diesem Fall bezeichnet man x als eine **Sprungstelle** von f.

Beispiel:

$$(\mathbf{3.8}) \quad f(x) := \operatorname{sgn} x := \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

lies „Signum von x".
Hier ist offenbar $x = 0$ eine Sprungstelle von f.

Ein weiteres Beispiel:
(3.9) $f(x) := [x]$: größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. D.h. $[x] = n$, wobei $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n+1$ ist (lies „größtes Ganzes von x"). Hier ist jede ganze Zahl eine Sprungstelle von f.

Für stetige Funktionen gilt der wichtige

(3.10) Zwischenwertsatz: *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und es gelte $f(a) \leq c \leq f(b)$. Dann existiert in $[a,b]$ mindestens ein x mit $f(x) = c$. Kurz: f nimmt auf $[a,b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis: Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n] \subseteq [a,b]$ mit der Eigenschaft $f(a_n) \leq c \leq f(b_n)$.

(i) $[a_1, b_1] := [a,b]$.

(ii) Wir nehmen an, das n-te Intervall $[a_n, b_n]$ sei bereits konstruiert.

(iii) Das $(n+1)$-te Intervall sei wie folgt konstruiert:
Gilt $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq c$, so setzen wir $a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$ und $b_{n+1} := b_n$. Sonst setzen wir $a_{n+1} := a_n$ sowie $b_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$.

Diese $[a_n, b_n]$ bilden offenbar eine Intervallschachtelung, und wir wählen x als die (eindeutig bestimmte) gemeinsame Zahl dieser Intervalle. Dann gilt $x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Andererseits gilt auch $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq c$ sowie $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq c$. Daraus folgt offenbar $f(x) = c$, d.h. der Wert c wird tatsächlich von der Funktion f angenommen. $\square$

(3.11) Folgerung: Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.

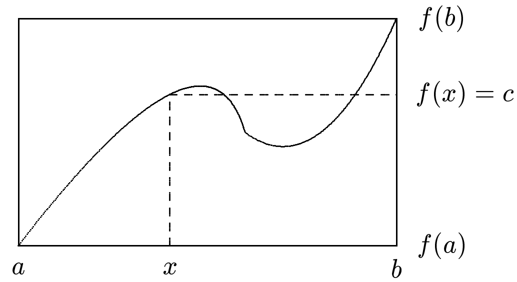

Abbildung 2.1: Zum Zwischenwertsatz.

Beweis: Sei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit reellen Koeffizienten $a_n, \ldots, a_1, a_0$ mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. OBdA können wir $a_n = 1$ annehmen, indem wir durch den Koeffizienten a_n durchdividieren.

Für $c < \min(-1, -(|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|))$ gilt:

$$f(c) = c^{n-1}\left(c + a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{c} + \ldots + \frac{a_0}{c^{n-1}}\right) <$$

$$< c^{n-1}\left(c + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_0|\right) < 0$$

(man beachte: n ist nach Voraussetzung ungerade, und daraus folgt $c^{n-1} > 0$).

Analog ist $f(b) > 0$ für $b > \max(1, |a_0| + \ldots + |a_{n-1}|)$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt damit die Existenz einer Nullstelle von f zwischen a und b. □

(3.12) Ist $n \in \mathbb{N}$ und $a > 0$, so hat die Gleichung

$$x^n = a$$

genau eine positive Lösung x. Wir schreiben hierfür $x = \sqrt[n]{a}$.

Beweis: Ist $m > a$, so $m^n - a > 0$ und $0^n - a = -a < 0$. Daraus folgt mit dem Zwischenwertsatz die Existenz von x mit der verlangten Eigenschaft.

Eindeutigkeit: Ist $x < y$, so $x^n < y^n$, so dass die Zahl x mit $x^n = a$ tatsächlich eindeutig bestimmt ist.

(3.13) Definition: *Eine Funktion g mit Definitionsbereich E heißt* **Umkehrfunktion** *der Funktion f mit Definitionsbereich D, wenn*

$$x \in D,\ y = f(x)$$

gleichbedeutend mit $y \in E,\ x = g(y)$ ist.

Beispiel: $x > 0,\ y = x^n$ ist gleichbedeutend mit $y > 0,\ x = \sqrt[n]{y}$.

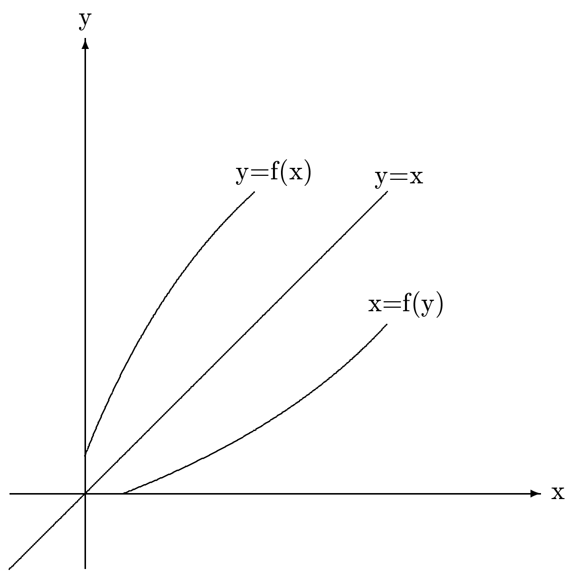

Abbildung 2.2: Den Graphen einer Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung des ursprünglichen Graphen an der Geraden $y = x$.

Man kann sich die Umkehrfunktionen im Fall $D \subseteq \mathbb{R},\ f(D) \subseteq \mathbb{R}$ geometrisch wie folgt veranschaulichen: Ist f mit dem Definitionsbereich D umkehrbar mit Umkehrfunktion $g : f(D) \to \mathbb{R}$, so liegen die Graphen der Funktionen f und g symmetrisch zur Geraden $y = x$. Der Punkt (a, b) geht dabei durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ in den Punkt (b, a) über.
Der Graph der Funktion f, d.h. die Menge $\{(x, f(x)) : x \in D\}$, geht nämlich durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ in $\{(f(x), x) : x \in D\}$ über und damit in den Graphen der Funktion g.

Eine wichtige Klasse von Funktionen, die stetige Umkehrfunktionen besitzen, sind die stetigen **monotonen** Funktionen:

(3.14) Definition: *Eine reellwertige Funktion mit reellem Definitionsbereich D heißt* **monoton wachsend** *(bzw.* **monoton fallend***), wenn für $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \le f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \ge f(x_2)$ gilt. f heißt* **streng monoton wachsend** *bzw.* **streng monoton fallend***, wenn dies mit „ $<$ “ bzw. „ $>$ “ gilt.*

(3.15) Satz: *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige reellwertige Funktion und streng monoton wachsend (bzw. fallend). Dann hat f eine streng monoton wachsende (bzw. fallende) Umkehrfunktion g. Ist $D = [a, b]$, so ist der Definitionsbereich von g das abgeschlossene Intervall $[f(a), f(b)]$ bzw. $[f(b), f(a)]$.*

Wir führen den **Beweis** für den Fall der monoton wachsenden Funktion. Der Beweis für den anderen Fall ist analog.

Seien $x_1, x_2 \in D$ und $y_i = f(x_i)$ für $i = 1, 2$. Dann ist $y_1 < y_2$ gleichbedeutend mit $x_1 < x_2$, ebenso $y_1 = y_2$ mit $x_1 = x_2$ und $y_1 > y_2$ mit $x_1 > x_2$. Insbesondere existiert dann tatsächlich die Umkehrfunktion g von f. Darüber hinaus ist g wieder streng monoton wachsend.
Sei $D = [a, b]$ und $x \in D$. Aus $a \leq x \leq b$ folgt daher $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Ist umgekehrt $y \in [f(a), f(b)]$, so folgt aus dem Zwischenwertsatz die Existenz eines $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$. Daher ist $E := [f(a), f(b)]$ der Definitionsbereich von g. Wir haben nun noch die Stetigkeit von g zu zeigen.

Sei $y_0 = f(x_0)$ ein Punkt aus E. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir ein $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cap D$ (bzw. $x_1 = x_0$, falls x_0 der linke Eckpunkt von D ist).

Ebenso wählen wir ein $x_2 \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \cap D$ (bzw. $x_1 = x_0$, falls x_0 der rechte Eckpunkt von D ist).
Weiter sei $f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$, also $x_1 \leq g(y) \leq x_2$. Aus

$$y \in E, \quad |y - y_0| < \min(f(x_2) - y_0, y_0 - f(x_1))$$

(bzw. $\leq f(x_2) - y_0$ falls $x_1 = x_0$ oder $\leq y_0 - f(x_1)$ falls $x_2 = x_0$) folgt, was wir brauchen:

$$|g(y) - g(y_0)| \leq \varepsilon.$$

$\square$

Beispiele:
(i) $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$, definiert für $x > 0$, hat die auf $[0, \infty)$ stetige Umkehrfunktion $x = \sqrt[n]{y}$.

(ii) Da die Komposition stetiger Funktionen wieder stetig ist, ist

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

stetig auf $[-1, 1]$. Auf $[0, 1]$ ist f streng monoton fallend und stimmt wegen $y = f(x) \iff x^2 + y^2 = 1 \iff x = f(y)$ mit der eigenen Umkehrfunktion überein.

(3.16) Jede auf einem beschränkten Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f ist beschränkt. Ist f reellwertig, so nimmt f ihr Maximum und ihr Minimum an, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

für alle $x \in [a, b]$.

Bevor wir diese wichtige Eigenschaft stetiger Funktionen beweisen, bemerken wir noch Folgendes:

(i) Auf offenen Intervallen (selbst wenn diese beschränkt sind) brauchen stetige Funktionen nicht beschränkt zu sein. Ein Beispiel ist

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{auf } (0,1).$$

(ii) Auch Funktionen, die beschränkt und in nur einem Punkt unstetig sind, brauchen nicht unbedingt ihr Maximum anzunehmen. Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases} 1-x & \text{falls } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1-x & \text{falls } -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

Diese Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ hat das offene Intervall $(-1,1)$ als Bildbereich und nimmt daher weder ihr Maximum noch ihr Minimum an.

Nun der Beweis von (3.16):
Wir nehmen an, die Funktion f auf $[a,b]$ sei unbeschränkt. Dann gibt es eine Folge (c_n) mit $c_n \in [a,b]$ und $|f(c_n)| > n$ für alle n (evtl. bis auf Anfangsglieder). Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß enthält (c_n) eine konvergente Teilfolge (d_n), und es ist dann $\lim_{n\to\infty} d_n = d \in [a,b]$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f(d_n) = f(d)$, und damit ist $(f(d_n))$ beschränkt. Wir haben also einen Widerspruch zur Konstruktion von (c_n). Damit ist gezeigt, dass die Funktion f tatsächlich beschränkt ist.

Ist f reellwertig, so sei $M := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Es gibt dann eine Folge (c_n), $c_n \in [a,b]$ mit

$$M - \frac{1}{n} \leq f(c_n) \leq M$$

für alle n. Also ist dann $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = M$.

Damit gibt es eine konvergente Teilfolge von (c_n), die wir (d_n) nennen wollen, mit $\lim_{n\to\infty} d_n = d$. Es ist dann

$$f(d) = \lim_{n\to\infty} f(d_n) = \lim_{n\to\infty} f(c_n) = M.$$

□

2.4 Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenz

Wir haben die **Potenz** a^x bisher nur für ganzzahlige Exponenten x definiert. In diesem Abschnitt ist es unser Ziel, im Fall $a > 0$ diese Definition für beliebige $x \in \mathbb{R}$ so auszudehnen, dass die Gültigkeit der Potenzgesetze erhalten bleibt. Mit anderen Worten:

Gesucht ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

(4.1) $\quad f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

und

(4.2) $\quad f(1) = a.$

Verlangt man noch $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so folgt sofort

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}, \quad \text{d.h. } f\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Für rationale $x = \frac{m}{n}$ gibt es also höchstens eine Funktion f mit (4.1), (4.2) und mit $f(x) \neq 0$.

Wir verlangen außerdem die Stetigkeit von f. Ist dann $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, so folgt

(4.3) $\quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n),$

falls $x_n \in \mathbb{Q}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Also: Es gibt höchstens eine positive stetige Funktion f mit (4.1) und (4.2).

Wie kann man eine solche Funktion definieren? Ein möglicher Ansatz wäre es, $f(x) = a^x$ zunächst für $x \in \mathbb{Q}$ zu erklären und dann (4.3) anzuwenden, um f allgemein zu erklären. Dazu ist zu zeigen: $f(x)$ ist **wohldefiniert**, d.h. unabhängig von der Wahl der gegen den festen Wert $x \in \mathbb{R}$ konvergenten Folge (x_n) aus $\mathbb{Q}$. Da dieser Ansatz etwas mühsam ist, gehen wir im folgenden einen anderen Weg:

In der Natur hat man bei der Vermehrung einer Population folgendes Gesetz: Die Vermehrung ist proportional zur gerade vorhandenen Menge. Ebenso ist es bei der Verminderung im radioaktiven Zerfall einer Substanz. Bezeichnet man mit $f(t)$ die nach Ablauf der Zeit t vorhandene Menge, so gilt damit die Gleichung

(4.4) $\quad f(s+t) = f(s) \cdot f(t).$

In kleinen Zeiten t soll die Vermehrung annähernd proportional zu t sein. Wir verlangen daher

(4.5) $\quad \lim_{t\to 0} \frac{f(t)-1}{t} = c.$

Unsere Aufgabe ist es nun also, eine Funktion f mit den beiden Eigenschaften (4.4) und (4.5) zu finden. Wie sieht eine solche Funktion f aus?
Zunächst ist

$$f(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt $f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)^n$. Setzt man nun $f\left(\frac{x}{n}\right) =: 1 + \frac{y_n}{n}$, so folgt mit (4.5)

$$\lim_{n\to\infty} y_n = cx.$$

Unser Ansatz lautet daher wie folgt: Sei (y_n) eine gegen x konvergente Folge. Wir setzen dann $f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{y_n}{n}\right)^n$.

Hierzu zunächst ein

(4.6) Hilfssatz: Gilt $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, so konvergiert die Folge $\left(\left(1 + \frac{y_n}{n}\right)^n\right)$ gegen $s = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}$.

Beweis: Nach dem binomischen Lehrsatz ist $\left(1 + \frac{y_n}{n}\right)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left(\frac{y_n}{n}\right)^m = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} n^{-m} \cdot y_n^m$. Bereits früher haben wir gezeigt: $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} n^{-k} = \frac{1}{k!}$. Wenn man in der Summe gliedweise die Grenzübergänge durchführen könnte, ergäbe sich die Behauptung sofort. Aber die Anzahl der Summanden wächst mit n, und wir müssen daher vorsichtiger vorgehen.

Wir wissen: $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}$ konvergiert absolut, ebenso $\sum_m \frac{(|y|+1)^m}{m!}$. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $M \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{(|y|+1)^m}{m!} \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nun wählen wir n so groß, dass $|y_n - y| \le 1$ und daher auch

$$|y_n| \le |y| + 1$$

sowie ferner $n > M$ gilt. Es ist dann

$$\left|\left(1 + \frac{y_n}{n}\right)^n - s\right| \le \left|\sum_{m=0}^{M} \binom{n}{m} n^{-m} y_n^m - \sum_{m=0}^{M} \frac{y^m}{m!}\right| + \left|\sum_{m=M+1}^{n} \binom{n}{m} n^{-m} y_n^m\right| +$$

$$+ \left|\sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\right|.$$

Wir wollen nun die Summe auf der rechten Seite abschätzen.
Der dritte Summand ist offenbar $\le \frac{\varepsilon}{3}$. Für den zweiten Summanden gilt

$$\binom{n}{m} n^{-m} = \frac{1}{m!} \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n^m} = \frac{1}{m!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{m-1}{n}) \le \frac{1}{m!},$$

und nach Wahl von M ist daher $\left|\sum_{m=M+1}^{n} \binom{n}{m} n^{-m} y_n^m\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$.

Auch der erste Summand ist, wenn man n groß genug wählt, $\le \frac{\varepsilon}{3}$ (da die Anzahl der Summanden fest ist). Daraus folgt

$$\left|\left(1 + \frac{y_n}{n}\right)^n - s\right| \le \varepsilon \quad \text{für } n > N = N(\varepsilon).$$

Dies beendet den Beweis von (4.6). □

Wir wissen damit nun, dass für eine beliebige Folge (y_n) mit $y_n \to y$ der Grenzwert $s = \sum_m \frac{y_m}{m!}$ stets derselbe ist; z.B. kann man $y_n := cx$ wählen oder, speziell für $c = 1$, etwa $y_n = x$. Der allgemeine Fall kann durch Substitution $x \to cx$ auf den Fall $c = 1$ zurückgeführt werden.

(4.7) Satz und Definition: *Es gibt eine und nur eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion f, welche die Gleichung (4.1) und $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)-1}{t} = 1$ erfüllt. Sie wird* **Exponentialfunktion** *genannt, mit*

$$f(x) =: \exp(x)$$

bezeichnet und ist durch

(4.8) $\quad f(x) = \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$

gegeben. Sie hat folgende Eigenschaften:

(4.9) $\quad \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y), \quad \exp(0) = 1,$

(4.10) $\quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ *und*

(4.11) $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(cx)-1}{x} = c.$

Beweis: Falls eine solche Funktion f existiert, haben wir bereits gezeigt, dass sie die Gestalt (4.8) hat. Wir haben ebenfalls gezeigt $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ (siehe Hilfssatz).
Die Aussage (4.1) und $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)-1}{t} = 1$ sind in (4.9), (4.10) und (4.11) enthalten. Wir beweisen nun (4.9), (4.10) und (4.11).
Zu (4.9):

$$\exp(x)\cdot\exp(y) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\left(x + y + \frac{xy}{n}\right)\right)^n = \exp(x + y)$$

(wobei wir (4.6) und $\lim_{n\to\infty} \left(x + y + \frac{xy}{n}\right) = x + y$ verwenden).

Es ist klar, dass $\exp(0) = 1$ gilt. Mit der Substitution $y = -x$ folgt außerdem $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, d.h. (4.10).

Zu (4.11): Es ist

$$\left|\frac{\exp(cx) - 1}{x} - c\right| = \left|\sum_{m=2}^{\infty} \frac{c^m x^{m-1}}{m!}\right| \le |c|\cdot \sum_{m=2}^{\infty} |cx|^{m-1} = \frac{|c^2 x|}{1 - |cx|} \to 0 \quad \text{für } x \to 0.$$

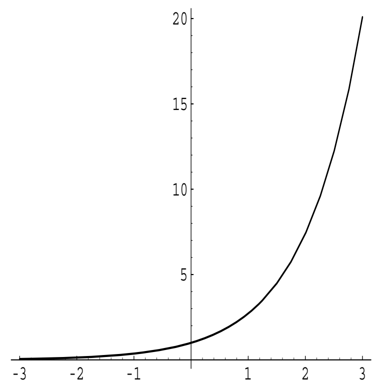

Abbildung 2.3: Exponentialfunktion

Dies beendet den Beweis von (4.7). □

(4.12) Die Funktion exp ist für alle x stetig, streng monoton wachsend und nimmt alle positiven Werte an.

Beweis: Zunächst ist $\lim_{x\to 0}\exp(x) = \lim_{x\to 0}\left(1 + x\frac{\exp(x)-1}{x}\right) = 1$. Daraus folgt mit (4.10) und (4.9)

$$\lim_{x\to a}\exp(x) = \exp(a)\cdot\lim_{x\to a}\exp(x-a) = \exp(a),$$

und dies beweist bereits die Stetigkeit von exp.
Ist nun $x > 0$, so folgt $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots > 1 + x$ und damit insbesondere $\exp(x) > 0$. Weiter ist $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, so dass im Fall $x \leq 0$ ebenfalls $\exp(x) > 0$ gilt.

Ist weiter $y > x$, so $\exp(y) = \exp(y-x)\exp(x) \geq (1-y-x)\exp(x) > \exp(x)$. Die Exponentialfunktion ist also streng monoton wachsend.
Ist $a > 0$, so gilt $\exp\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{a}\right)} < \frac{1}{1+\frac{1}{a}} < a < 1 + a < \exp(a)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x \in [-\frac{1}{a}, a]$ mit $\exp(x) = a$. Also nimmt die Exponentialfunktion tatsächlich alle positiven Werte an. □

(4.13) Definition: *Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion* $y = \exp x$ *heißt der* **natürliche Logarithmus***:* $x = \log(y)$ *(oft auch* $x = \ln y$ *geschrieben).*

Der Logarithmus hat den Definitionsbereich $\{x : x > 0\}$, ist stetig und monoton wachsend und hat den Bildbereich $\mathbb{R}$. Er erfüllt offenbar die Funktionalgleichung

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y) \tag{4.14}$$

sowie $\log(1) = 0$.

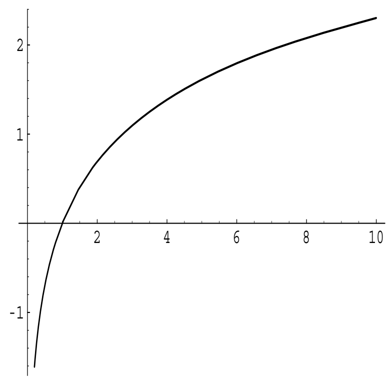

Abbildung 2.4: Natürlicher Logarithmus

Mit $f = \exp$ erfüllt auch die Funktion $x \mapsto f(cx)$ die Funktionalgleichung. Es ist $\exp(c) = a$, und man hat $c = \log(a)$.

(4.15) Satz und Definition: *Ist a eine positive Zahl, so gibt es genau eine für alle reellen Zahlen definierte und stetige Funktion f mit den Eigenschaften (4.1) und (4.2). Sie wird* **allgemeine Potenz** *zur* **Basis** *a genannt, mit $f(x) = a^x$ bezeichnet und durch*

(4.16) $\quad a^x = \exp(x \log a)$

gegeben. Sie hat die Eigenschaften

(4.17) $\quad a^x a^y = a^{x+y},\ (ab)^x = a^x b^x,\ (a^x)^y = a^{xy}$

und stimmt für ganze $x = n$ mit der in Kapitel 1 definierten Potenz überein, sowie für $a = e$ mit der Exponentialfunktion.

Beweis: Wir haben schon früher gezeigt, dass es höchstens eine Funktion gibt, die für ganze x mit der Potenz a^x übereinstimmt und die Eigenschaften (4.1), (4.2) hat. (4.16) folgt aus der früher bewiesenen Eigenschaft (4.9). Die anderen Behauptungen sind in (4.16) enthalten. $\square$

Für alle $a > 1$ ist die durch (4.16) gegebene Funktion $x \mapsto a^x$ monoton wachsend. Ihre Umkehrfunktion nennt man den **Logarithmus zur Basis** a und schreibt $\log_a x$. Der Logarithmus zur Basis $a = e$ wird **natürlicher Logarithmus** genannt und man schreibt, wie in (4.13) angemerkt, $\log(x)$ oder $\ln x$.

Aus (4.16) folgt: $x \mapsto \frac{\log x}{\log a}$ ist Umkehrfunktion von $x \mapsto a^x$. Denn genau dann gilt $\frac{\log y}{\log a} = x$, wenn $x \log a = \log y$ gilt. Dies aber ist gleichbedeutend mit $y = \exp(x \log a)$, d.h. mit $y = a^x$.

Es gelten daher die **Umrechnungsformeln**

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}, \quad \log x = \frac{\log_a x}{\log_a e}$$

(denn $\frac{\log_a x}{\log_a e}$ ist der Quotient aus $\frac{\log x}{\log a}$ und $\frac{\log e}{\log a}$ und damit gleich $\log x$).

Hier einige wichtige Grenzwerte:

(4.18) $\quad \lim_{x\to\infty} x^n \cdot e^{-x} = 0$

(in Worten: Exponentielles Wachstum ist in jedem Fall schneller als polynomiales Wachstum).

Beweis: Es ist $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ für $x > 0$. Daraus folgt mittels $0 \leq x^n \cdot e^{-x} \leq \frac{(n+1)!}{x}$ die Behauptung. □

(4.19) $\quad \lim_{y\to\infty} \frac{(\log y)^n}{y} = 0, \quad \lim_{z\to 0+} z \cdot (\log z)^n = 0.$

(in Worten: Der Logarithmus wächst schwächer als jede Potenz von y).
Zum **Beweis** genügt es, mit $x := \log y$ bzw. $x := -\log z$ die Aussage (4.18) anzuwenden.

2.5 Exponentialfunktion im Komplexen und trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus werden oft mit Hilfe der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks definiert. Dabei stellt sich aber die Frage, was ein **Winkel** exakt ist. Selbst wenn man einen Winkel mit der Bogenlänge eines Teils des Einheitskreises definiert, ist ohne den Integrationskalkül nicht von vornherein klar, was unter der Bogenlänge zu verstehen ist. Wir wählen deshalb einen anderen Zugang zu den trigonometrischen Funktionen.

Wie schon früher identifizieren wir die x-y-Ebene $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$:

$$(x, y) \leftrightarrow x + iy.$$

Wir nehmen an, man weiß, in welchen Punkt $x + iy = f(t)$ der Punkt 1 durch Drehung mit dem Winkel t abgebildet wird. Nach Abschnitt 1.5 entspricht dann die Drehung um den Winkel t der Multiplikation mit der komplexen Zahl $f(t)$. Dreht man zunächst um den Winkel s und dann um den Winkel t, so hat man insgesamt eine Drehung um den Winkel $s + t$. Wir haben damit

$$f(s) \cdot f(t) = f(s + t),$$

was genau der Gleichung (4.4) entspricht. Auch (4.5) hat ein Analogon: Wir nehmen an, der Punkt $f(t)$ durchlaufe den Einheitskreis $|x + iy| = 1$ mit Geschwindigkeit 1, d.h. für $f(0) = 1$ gilt bei kleinem t:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t) - 1}{t} = i.$$

Gesucht ist also eine komplexwertige Funktion $f(t),\ t \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (4.4) und (4.5) für $c = i$. Alle unsere Überlegungen aus dem letzten Abschnitt sind dabei auch hier anwendbar, und man erhält:

(5.1) Definition und Satz: *Für komplexe (nicht mehr notwendig reelle) x sei*

$$\exp x := \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

und für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$a^x := \exp(x \cdot \log a)$$

die allgemeine Potenz zur Basis a. Dann gilt für $x, y \in \mathbb{C}$

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y), \quad \exp(0) = 1, \exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$$

sowie

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (ab)^x = a^x \cdot b^x,$$

und es ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(cx) - 1}{x} = c$$

auch für komplexes c.

(5.2) Satz und Definition: *Es gibt zwei für alle reellen Zahlen t definierte reellwertige Funktionen*

$$\sin t, \quad \cos t,$$

genannt „Sinus“ und „Cosinus“, so dass die komplexwertige Funktion

$$f(t) = \cos t + i \sin t$$

die Eigenschaften (4.4) und (4.5) hat. Die Funktion f und

$$\cos = \mathrm{Re} f, \quad \sin = \mathrm{Im} f$$

sind durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt und werden durch

$$f(t) = \exp(it) = e^{it}$$

gegeben.

Aus der Potenzreihenentwicklung für exp ergeben sich mit $x = it, t \in \mathbb{R}$ sofort die Potenzreihenentwicklungen für sin und cos:

$$(\mathbf{5.3}) \quad \sin t = \mathrm{Im}(e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot t^{2n+1},$$

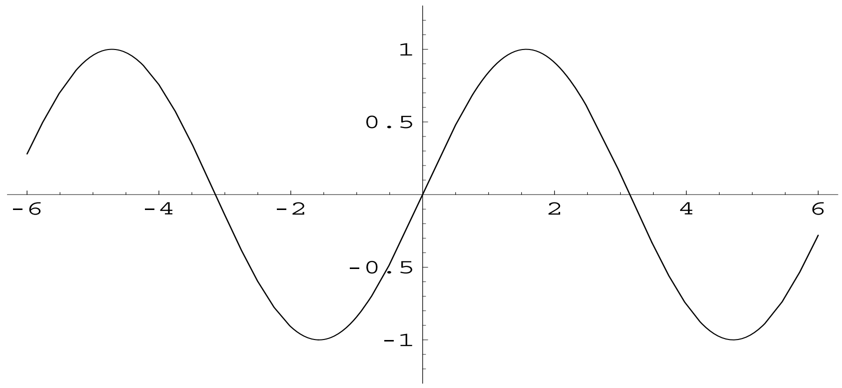

Abbildung 2.5: Sinus

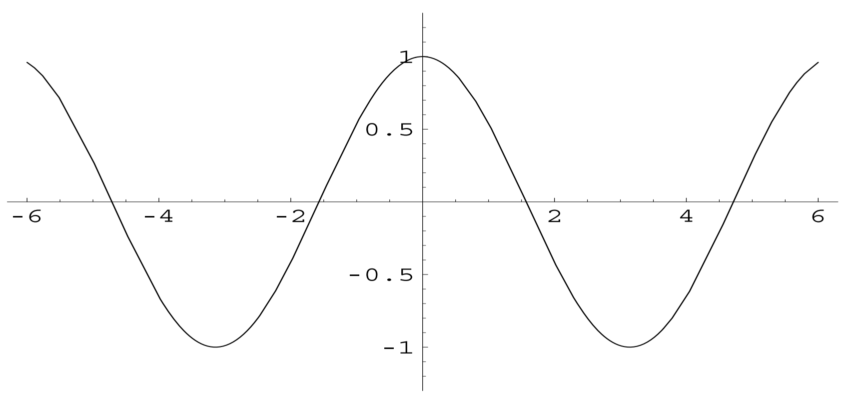

Abbildung 2.6: Cosinus

$$\cos t = \mathrm{Re}(e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot t^{2n}.$$

Es gelten die **Eulerschen Formeln:**

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \tag{5.4}$$

$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}),$$

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}).$$

Indem man (5.4) in die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion einsetzt, erhält man die sogenannten **Additionstheoreme**:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \tag{5.5}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Weiter gelten folgende Gesetze:

$$\sin(0) = 0, \quad \cos(0) = 1, \tag{5.6}$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x,$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

wobei man, um Klammern zu sparen, $(\sin x)^2$ als $\sin^2 x$ schreibt; entsprechend beim Cosinus.

Die Additionstheoreme beweist man wie folgt:

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{ix}e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) =$$

$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y).$$

Der Beweis der dritten Eigenschaft aus (5.6) ist folgender:

$$1 = e^0 = e^{ix}e^{-ix} = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Speziell für $c = i$ bzw. $c = -i$ ergibt der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(cx)-1}{x} = c$ Folgendes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0. \tag{5.7}$$

Es ist nämlich $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(ix)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + i\sin x - 1}{x} = i$, ebenso $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(-ix)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{cos(-x)-i\sin x}{x} = -i$. Daraus folgt durch Addition $\lim_{x\to 0} 2\left(\frac{\cos x - 1}{x}\right) = 0$ und daraus weiter $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(5.8) Die Funktionen $x \mapsto e^{-x}$, $\sin x$ und $\cos x$ sind auf $\mathbb{R}$ stetig.

(Zum Beweis: Man vergleiche den Beweis der Stetigkeit von exp im vorigen Abschnitt.)

Wir werden nun die Funktionen sin und cos genauer untersuchen.
Aus (5.3) folgt zunächst:

(5.9) Für $0 \leq x \leq 4$ gilt

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

sowie

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = \frac{1}{24}\left((x^2-6)^2 - 12\right).$$

Beweis: Ist $x \in [0,4]$, so gilt

$$\frac{x^3}{3!} \geq \frac{x^4}{4!} \geq \frac{x^5}{5!} \geq \cdots,$$

und daraus folgt: Die Reihen für $\sin x - x$ und $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ genügen dem Leibnizschen Kriterium (2.7), und hieraus ergeben sich die behaupteten Ungleichungen. □

Aus (5.9) folgt:

$$\sin x > 0 \quad \text{für } 0 < x < \sqrt{6}$$

und

$$\cos x > 0 \quad \text{für } 0 < x < \sqrt{2}$$

(denn $1 - \frac{x^2}{2} > 0$ ist gleichbedeutend mit $1 > \frac{x^2}{2}$ und daher mit $2 > x^2$). Weiter folgt aus (5.9)

$$\cos x < 0 \quad \text{für } \sqrt{6-\sqrt{12}} < x < \sqrt{6+\sqrt{12}}$$

(denn $(x^2-6)^2 - 12 < 0$ ist gleichbedeutend mit $-\sqrt{12} < x^2 - 6 < \sqrt{12}$, also mit $6 - \sqrt{12} < x^2 < 6 + \sqrt{12}$).

Also haben die beiden Werte $\cos 1,4$ und $\cos 1,6$ verschiedene Vorzeichen. Nach dem Zwischenwertsatz liegt also zwischen beiden eine Nullstelle (die wir ω nennen wollen) von cos.

Ferner ist cos zwischen 0 und $\sqrt{6}$ streng monoton fallend. Um dies zu zeigen, setzen wir für $0 < y < z < \sqrt{6}$ jeweils $u := \frac{z+y}{2}$ und $v := \frac{z-y}{2}$. Dann liegen auch u und v zwischen 0 und $\sqrt{6}$, und aus (5.5) folgt

$$\cos z - \cos y = \cos(u+v) - \cos(u-v) =$$

$$= \cos u \cos v - \sin u \sin v - \cos u \cos v - \sin u \sin v = -2 \sin u \sin v < 0.$$

Daher ist ω die einzige Nullstelle des Cosinus zwischen 0 und $\sqrt{6}$. Wir definieren nun

$$2\omega =: \pi.$$

Für diese Zahl π (pi) $= 3,14159\ldots$ gilt: Im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ durchläuft $\cos t$ wegen des Zwischenwertsatzes sämtliche Werte zwischen 1 und 0. Wegen $\sin t > 0$ gilt dort $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$, und wir haben damit:

(5.10) Im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ durchläuft $e^{it} = \cos t + i \sin t = x + iy$ den im ersten Quadranten gelegenen Viertelkreis $|x + iy| = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ von 1 bis i.

Das weitere Verhalten von $e^{it},\ \sin t,\ \cos t$ ergibt sich aus den Formeln

$$\text{(5.11)} \qquad e^{\frac{\pi i}{2}} = i, \quad \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$$

$$e^{\pi i} = -1, \quad \sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x,$$
$$e^{2\pi i} = 1, \quad \sin(x - 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Damit lautet unser Resultat:
(5.12) In $[0, 2\pi]$ durchläuft $e^{it} = x + iy$ den Einheitskreis

$$\{x + iy \in \mathbb{C} : |x + iy| = 1\} =: S^1$$

genau einmal. Die Funktionen $e^{it},\ \sin t,\ \cos t$ sind periodisch mit der Periode 2π. (Eine **periodische Funktion** f mit Periode $p \neq 0$ ist eine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ oder $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die $f(x) = f(x + p)$ für alle x aus dem Definitionsbereich erfüllt.)

Wir definieren nun zwei weitere trigonometrische Funktionen:

Definition (5.13): *Der* **Tangens** *einer reellen Zahl, geschrieben* tg x *oder* $\tan x$*, ist gegeben als* $\frac{\sin x}{\cos x}$ *(wobei* $x \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ *vorauszusetzen ist).* *Der* **Cotangens**, *geschrieben* ctg x *oder* cot x, *ist gegeben als* $\frac{\cos x}{\sin x}$ *(wobei* $x \notin \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$ *vorauszusetzen ist).*

Für diese Funktionen gilt:

$$\text{(5.14)} \qquad \mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\ x, \quad \mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}(x),$$

$$\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{ctg}(x), \quad \mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{tg}(x),$$

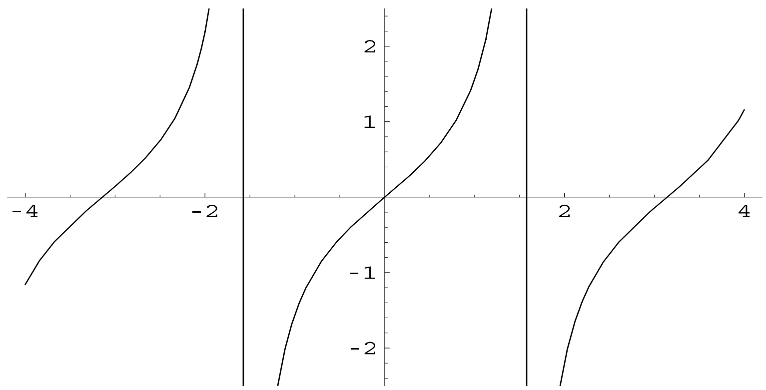

Abbildung 2.7: Tangens

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg}(x), \quad \operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg}(x).$$

(5.15) Die Funktion tg x ist auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton wachsend. $\operatorname{ctg}(x)$ ist auf $(0,\pi)$ streng monoton fallend. Beide Funktionen sind stetig, haben den Bildbereich $\mathbb{R}$ und sind periodisch mit der Periode π.

Man kann von allen vier trigonometrischen Funktionen Umkehrfunktionen definieren, wobei nur jeweils der Definitionsbereich richtig zu wählen ist.

Der Sinus ist eine bijektive Abbildung von $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ nach $[-1,1]$. Die Umkehrfunktion des Sinus wird als **Arcussinus** bezeichnet und arcsin geschrieben. arcsin ist dann also eine bijektive Abbildung von $[-1,1]$ nach $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

In entsprechender Weise ist der Cosinus eine bijektive Abbildung von $[0,\pi]$ nach $[-1,1]$. Ihre Umkehrfunktion wird als **Arcuscosinus** bezeichnet und arccos geschrieben. Sie ist eine bijektive Abbildung von $[-1,1]$ nach $[0,\pi]$.

Der Tangens ist eine bijektive Abbildung von $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nach $\mathbb{R}$. Ihre Umkehrfunktion, der **Arcustangens**, ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Der Cotangens schließlich ist eine bijektive Abbildung von $(0,\pi)$ nach $\mathbb{R}$. Ihre Umkehrfunktion, der **Arcuscotangens**, ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $(0,\pi)$.

Interessant ist es, die vier trigonometrischen Funktionen mit den sogenannten **hyperbolischen Funktionen** zu vergleichen. Wir stellen daher im Folgenden einige Grundtatsachen über hyperbolische Funktionen zusammen.

Definition (5.16): *Man setzt für reelle x*

$$\operatorname{sh} x := \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

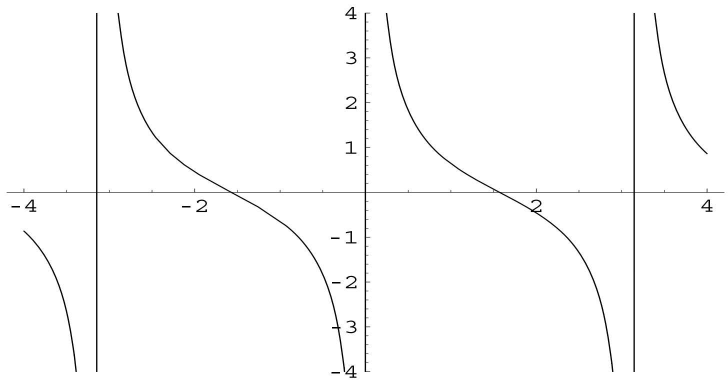

Abbildung 2.8: Cotangens

und

$$\text{ch } x := \cosh\ x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(lies: **Sinus hyperbolicus** *und* **Cosinus hyperbolicus***).*

Zu der uns bereits bekannten Gleichung $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ gibt es dann das Analogon $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Daher durchläuft $(\cosh x,\ \sinh x)$ für $x \in \mathbb{R}$ einen Ast der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$.

Es gelten die Additionstheoreme

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

und

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

Weiter ist sinh auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, und cosh ist streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$. Die Umkehrfunktionen werden als arsinh und arcosh geschrieben und mit **Area Sinus** bzw. **Area Cosinus** bezeichnet.

Kapitel 3

Differentialrechnung

3.1 Die Ableitung

Motivation: Liegt eine Kurve $y = f(x)$ in der xy-Ebene vor, so interessiert man sich oft für die **Steigung** dieser Kurve in einem bestimmten Punkt oder im Mittel über ein Intervall.

Wir führen zunächst den Begriff der **Sekante** ein. Darunter ist eine Gerade der Form

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$

zu verstehen, wobei zwei Punkte $x_0 < x_1$ fest vorgegeben sind. Eine Sekante ist also eine Verbindungsgerade zwischen zwei Punkten $(x_0,\ f(x_0))$ und $(x_1,\ f(x_1))$.

Unter der **mittleren Steigung** der Funktion f zwischen x_0 und x_1 versteht man dann den Quotienten

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Lässt man nun x_1 gegen x_0 konvergieren, so nähert sich in vielen Fällen diese mittlere Steigung einem von der Wahl der gegen x_0 konvergenten Folge unabhängigen Wert c an. Die Sekante geht dann in eine **Tangente** über, die gegeben ist durch $y = f(x_0) + c(x - x_0)$.

In entsprechender Weise lässt sich der Begriff der Ableitung auch auf dem physikalischen Weg motivieren. Betrachtet man die Bewegung eines Massenpunkts auf einer Geraden, so beschreibt man diese Bewegung durch eine Gleichung der Form

$$x = g(t) \quad (t = \text{Zeit}).$$

In einem Zeitintervall $[t_0, t_1]$ hat man dann die mittlere Geschwindigkeit

$$\frac{g(t_1) - g(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Wieder lässt man nun t_1 gegen t_0 konvergieren. Falls die mittlere Geschwindigkeit hierbei gegen einen Grenzwert v konvergiert, der nicht von der Wahl der gegen t_0 konvergenten Folge abhängt, nennt man $v = v(t_0)$ die **Momentangeschwindigkeit** zum Zeitpunkt t_0.

Hier noch die analytische Deutung der Ableitung durch **lineare Approximation**:

Es wird diejenige Gerade g durch $(x_0, f(x_0))$ gesucht, die f in der Nähe von x_0 am besten approximiert. „Am besten" heißt hier:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0,$$

d.h. der **relative Fehler** (der gerade unser Quotient ist) ist nahe x_0 klein und strebt für $x \to x_0$ gegen Null. In diesem Fall ist g die Tangente (falls sie existiert) von f im Punkt x_0, nämlich $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

(1.1) Definition: *Die Funktion f sei auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert und $x_0 \in I$. f heißt in x_0* **differenzierbar**, *wenn der Grenzwert*

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar**, *wenn f in jedem Punkt von I differenzierbar ist, und* **stetig differenzierbar**, *wenn die Ableitung $x \mapsto f'(x)$ darüber hinaus eine stetige Funktion ist.*

Bei der Differenzierbarkeit in einem Punkt x_0 wird also verlangt, dass dieser Grenzwert nicht von der Wahl der gegen x_0 konvergenten Folge abhängt - mit der Einschränkung, dass der Wert x_0 in der Folge nicht selbst vorkommt.

Bemerkung: In vielen Fällen ist eine Funktion f in einem Punkt x_0 nicht differenzierbar, obwohl dort der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten $f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. Ebenso braucht f in x_0 nicht differenzierbar zu sein, wenn der rechtsseitige Grenzwert $f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ oder sogar beide Grenzwerte existieren.

Der Quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ heißt **Differenzenquotient**. Der Wert $f'(x_0)$ wird, falls er existiert, der **Differentialquotient** oder die **Ableitung** von x an der Stelle x_0 genannt. Man schreibt dann $f'(x_0)$ auch als $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Bemerkung: Die Funktion f kann reell- oder komplexwertig sein. Hingegen beschränken wir den Definitionsbereich von f auf eine Teilmenge der reellen Zahlen. Manche der folgenden Regeln bleiben auch für Funktionen mit komplexem Definitionsbereich gültig (man spricht dann von **komplexer Differenzierbarkeit** in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$). Die komplexe Differenzierbarkeit wird allerdings nicht Gegenstand dieser Vorlesung sein, sondern wird in der Funktionentheorie behandelt.

Wir kommen nun nochmals auf den Zusammenhang der Ableitung mit linearer Approximation zurück. Ist f in x_0 differenzierbar, so definieren wir

$$q(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{falls } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{falls } x = x_0. \end{cases}$$

Dann gilt laut Definition $\lim_{x\to x_0} q(x) = q(x_0)$, d.h. q ist an der Stelle x_0 stetig. Weiter gilt

(1.2) $\quad f(x) = f(x_0) + q(x)(x - x_0).$

Umgekehrt gelte (1.2) in einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$. Ist dann q stetig in x_0, so ist f differenzierbar in x_0 mit Ableitung $f'(x_0) = q(x_0)$.

Wir haben damit gezeigt, dass (1.1) mit der Existenz einer Darstellung nach (1.2) mit einer in x_0 stetigen Funktion q gleichbedeutend ist.

Ferner folgt

(1.3) Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f auch stetig in x_0.

Bemerkung: Die umgekehrte Aussage gilt nicht. Beispiel: Sei

$$f(x) = |x|$$

der (reelle) Absolutbetrag von x. Dann ist f im Punkt 0 nicht differenzierbar. Es gilt nämlich $f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 1$ und andererseits $f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -1$, d.h. der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten stimmen nicht überein (obwohl sie existieren).

Hier einige Beispiele differenzierbarer Funktionen:

(i) Ist $f \equiv c$ konstant, so $f'(x) \equiv 0$.

(ii) Sei $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Für den Differenzenquotienten gilt dann

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} \cdot x_0^k,$$

und daraus folgt durch Grenzübergang $x \to x_0$:

(1.4) $\quad \frac{dx^n}{dx} = n \cdot x_0^{n-1}$

für alle $n = 1, 2, \ldots$ und übrigens auch für $n = 0$, wenn man $0 \cdot x^{-1}$ als 0 definiert.

(1.5) Sind f, g in einem Punkt x_0 differenzierbar, so sind dies auch die Funktionen $af + bg$ $(a, b \in \mathbb{R})$ sowie $f \cdot g$. Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar. Es gelten folgende Regeln:

$$(af + bg)'(x_0) = af'(x_0) + bg'(x_0),$$

die **Produktregel**

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

und die **Quotientenregel**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Es gilt nämlich offenbar

$$\frac{af(x) + bg(x) - af(x_0) - bg(x_0)}{x - x_0} = a\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + b\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Der Beweis der Produktregel ergibt sich durch

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Der Beweis der Quotientenregel ergibt sich wie folgt:

$$\frac{1}{x - x_0} \cdot \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right) =$$

$$= \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)}.$$

Anwendung: Aus der Quotientenregel folgt $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1}$ für alle $x \neq 0$. Also gilt (1.4) auch für negative ganze n. Insgesamt folgt

(1.6) *Jedes Polynom ist (überall) differenzierbar, jede rationale Funktion überall dort, wo der Nenner nicht verschwindet.*

Weiter ist
(1.7) $\quad \frac{d}{dx}e^{cx} = ce^{cx}$ für alle $c \in \mathbb{R}$, insbesondere also $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.

Beweis: Ersetzt man x_0 durch x und x durch $x + h$, so hat man

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(e^{c(x+h)} - e^{cx}\right) = e^{cx} \lim_{h \to 0} \frac{e^{ch} - 1}{h} = e^{cx} \cdot c$$

(der letzte Schritt verwendet die Eigenschaft (4.5) des letzten Kapitels, die wir zur Konstruktion der Exponentialfunktion mitverwendet haben).

Wählt man speziell $c = \log a$, so ergibt sich aus der Definition der allgemeinen Potenz a^x die Formel

(1.8) $\quad \frac{d}{dx}a^x = a^x \cdot \log a.$

(1.8) gilt auch für komplexe c, insbesondere für $c = \pm i$. Dann hat man nach den Eulerschen Formeln

(1.9) $\quad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x.$

Es ist nämlich $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$ und daher $(\sin x)' = \frac{1}{2i}\left(ie^{ix} + ie^{-ix}\right) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x$. Die zweite Formel aus (1.9) beweist man analog, indem man von der Identität $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ausgeht.

(1.10) Folgerung: Es gilt

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{für } x \notin \left\{\frac{2n+1}{2}\pi : n \in \mathbb{Z}\right\}$$

und

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{für } x \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Wir betrachten nun die Ableitung der Umkehrfunktion einer gegebenen Abbildung: Es gilt der

(1.11) Satz: *Sei f auf dem offenen Intervall I stetig und streng monoton. In $y_0 \in I$ sei f differenzierbar mit $f'(y_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion g in $x_0 = f(y_0)$ differenzierbar mit der Ableitung*

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(g(x_0))}.$$

Beweis: Wegen der Stetigkeit von g ist $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Setzt man nun $y := g(x)$ und $y_0 := g(x_0)$, so hat man

$$f'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)}.$$

Nach den Rechenregeln für Grenzwerte ist daher

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(g(x_0))}.$$

□

Beispiele:

(i) Die Exponentialfunktion $f(y) = e^y$ hat die Umkehrfunktion $g(x) = \log x$. Es ist dann $g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$. Daraus folgt für $x > 0$ die wichtige Regel

(1.12) $\quad \frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}.$

(ii) Zu $f(y) = \sin y,\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ist $g(x) = \arcsin x$ die Umkehrfunktion. Für ihre Ableitung gilt

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(Wir haben dabei verwendet, dass der Cosinus auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ positiv ist.) Die analoge Rechnung lässt sich für den Arcuscosinus durchführen. Wir haben dann

(1.13) $\quad \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

für $|x| < 1$.

(iii) Sei $f(y) = \tan y$ mit der Umkehrfunktion $x = \arctan y$. Dann gilt

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Die analoge Rechnung lässt sich für den Cotangens durchführen, und wir haben dann:

(1.14) $\quad \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \ \frac{d}{dx} \text{arccot}\ x = -\frac{1}{1+x^2}.$

(iv) Sei $f(y) = \sinh y$ mit der Umkehrfunktion $g(x) = \text{arsinh}\ x$. Dann gilt

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Die analoge Rechnung kann man für den Area Cosinus durchführen, wir haben dann:

(1.15) $\quad \frac{d}{dx} \text{arsinh}\ x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{d}{dx} \text{arcosh}\ x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad$ für $x > 1$.

Auch für die Ableitung einer Komposition von Funktionen gibt es eine wichtige Regel:

(1.16) Kettenregel: *Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. f sei in $x_0 \in D$ differenzierbar, und g sei in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist*

$$h = g \circ f : D \to \mathbb{R}$$

in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Diese Regel kann man mit $f(x) = y,\ g(y) = z$ auch in der einprägsamen Weise

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

schreiben („äußere Ableitung mal innere Ableitung“). Man sollte sich aber darüber klar sein, dass unsere letzte Zeile keineswegs ein Beweis der Kettenregel ist (weil es sich beim Differentialquotienten nicht um einen Quotienten im gewöhnlichen Sinn handelt, sondern um den Grenzwert eines Quotienten). Naheliegend ist der Versuch, unsere Zeile wie folgt zu einem Beweis zu machen:

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Bei diesem Versuch treten Komplikationen auf, da $f(x) - f(x_0)$ Null werden kann. Wir gehen darum lieber mit der Zeile (1.2) vor.

Beweis von (1.16): Es ist $f(x) - f(x_0) = q(x) \cdot (x - x_0)$ mit einer in x_0 stetigen Funktion q und $q(x_0) = f'(x_0)$. Ebenso ist $g(y) - g(y_0) = r(y)(y - y_0)$ mit einer in y_0 stetigen Funktion r und $r(y_0) = g'(y_0)$. Es gilt

$$h(x) - h(x_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)) = r(f(x))(f(x) - f(x_0)) = r(f(x)) \cdot q(x)(x - x_0).$$

Nun ist $x \mapsto r(f(x)) \cdot q(x)$ stetig in x_0, und daraus folgt mit (1.2) die Differenzierbarkeit von h in x_0, wobei die Ableitung an der Stelle x_0 durch $r(f(x_0)) \cdot q(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$ gegeben ist. Dies beendet den Beweis von (1.16). □

Beispiele:

1. Sei $f(x) = a \log x$ und $g(y) = e^y$. Die Komposition $h = g \circ f$ ist dann durch $h(x) = e^{a \log x} = x^a$ gegeben, und aus der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dx}(x^a) = a x^{a-1}$$

für $x > 0$ und beliebige reelle Exponenten a.

2. Sei $f(x) = \sin x$, $g(y) = \log y$. Für die Komposition $h(x) = \log(\sin x)$ gilt dann

(1.17) $\quad \frac{d}{dx}(\log(\sin x)) = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$

für alle x mit $\sin x > 0$. Analog ist

$$\frac{d}{dx} \log(-\sin x) = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \operatorname{ctg} x$$

im Fall $\sin x < 0$. Insgesamt haben wir dann

$$\frac{d}{dx} \log|\sin x| = \operatorname{ctg} x \quad \text{für } x \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Analog zeigt man

$$\frac{d}{dx} \log|\cos x| = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x \quad \text{für } x \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

3.2 Der Mittelwertsatz

Wir betrachten in diesem Abschnitt Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ gilt.

(2.1) Definition: *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, f habe an der Stelle $x_0 \in D$ ein* **absolutes Maximum**, *wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$ gilt. Man bezeichnet x_0 als ein* **relatives Maximum** *von f, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \textit{für alle } x \in D \cap \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}.$$

In analoger Weise definiert man ein absolutes oder relatives **Minimum** *von f. Unter einem* **Extremum** *oder* **Extremwert** *von f versteht man ein Maximum oder Minimum.*

Bemerkung: Jedes absolute Maximum (oder Minimum) ist auch ein relatives Maximum (bzw. Minimum). Hier gilt aber nicht notwendigerweise die Umkehrung.

(2.2) Satz: *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann gilt:*
(i) Ist f in $c \in (a, b)$ differenzierbar und hat f ein relatives Extremum in c, dann gilt $f'(c) = 0$.
(ii) Existieren in a bzw. b die einseitigen Ableitungen $f'_+(a)$ bzw. $f'_-(b)$, so gilt bei einem relativen Maximum

$$f'_+(a) \leq 0, \quad f'_-(b) \geq 0$$

und bei einem relativen Minimum

$$f'_+(a) \geq 0, \quad f'_-(b) \leq 0.$$

Wir führen den **Beweis** für den Fall des relativen Maximums:
Aus $f(x) \leq f(c)$ für $|x - c| < \delta$ folgt $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, falls $x \geq c$. Also ist dann $f'_+(c) \leq 0$. Ist $x < c$, so folgt $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ und damit $f'_-(c) \geq 0$. Dies beendet den Beweis für den Fall $c = a$ oder $c = b$. Ist $c \in (a, b)$, so folgt hiermit sogar $f'(c) = 0$, und damit ist (2.2) bewiesen. □

(2.3) Satz von Rolle: *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Gilt $f(a) = f(b)$, so existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.*

Beweis: Ist f konstant, so gilt $f'(c) = 0$ für alle $c \in (a, b)$. Ist f nicht konstant, so existiert ein absolutes Maximum oder Minimum c von f, das von $f(a) = f(b)$ verschieden ist. Dieses Extremum hat nach (2.2) die verlangte Eigenschaft $f'(c) = 0$, und dies beendet den Beweis von (2.3). □

(2.4) Mittelwertsatz der Differentialrechnung:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

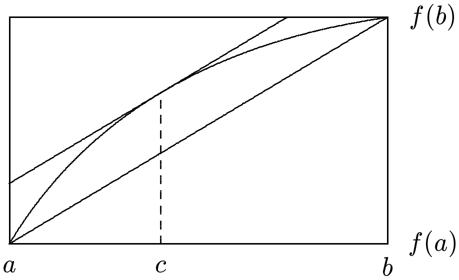

Abbildung 3.1: Zum Mittelwertsatz.

In Worten: Die mittlere Steigung von f zwischen a und b ist in mindestens einem Punkt gleich der Ableitung. Es gibt also mindestens eine (im Bild eingezeichnete) Tangente an den Graphen von f, die parallel zur Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

Beweis: Man wende den Satz von Rolle auf

$$\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

an. Es ist dann $\varphi(b) = f(a),\ \varphi(a) = f(a)$, und daraus ergibt sich mit dem Satz von Rolle die Behauptung. □

Anwendungen des Mittelwertsatzes:
(2.5) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und I ein Intervall. Gilt

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{bzw. } > 0,\ \leq 0,\ < 0,\ = 0$$

auf I, so ist f auf I monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend, monoton fallend, bzw. streng monoton fallend, konstant).

Denn aus $a < b,\ a, b \in I$ folgt die Existenz eines $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
□

Der Mittelwertsatz ist oft zur näherungsweisen Berechnung von Funktionswerten nützlich. Ist nämlich $f(x)$ bekannt (wobei x ein fester Wert aus D ist) und $h > 0$, so folgt mit $a := x$ und $b := x + h$: Jedes $c \in (a, b)$ lässt sich in der Form $c = x + \vartheta h$ mit $0 < \vartheta < 1$ schreiben. Damit folgt

(2.6) $\quad f(x + h) = f(x) + f'(x + \vartheta h) \cdot h.$

Die analoge Aussage gilt für $h < 0$, wenn man $a := x - h$ und $b := x$ setzt.

Beispiel: Wir wollen $\log 2,1$ berechnen, mit der Voraussetzung $\log 2 = 0,693 \pm \varepsilon$ und $|\varepsilon| \leq 5 \cdot 10^{-4}$.

Es folgt $\log 2,1 = 0,693 + \frac{0,1}{c}$ mit $2 < c < 2,1$. Daraus erhält man nun weiter $0,47 < \frac{1}{c} < 0,5$, und daher ist $\log 2,1 \approx 0,7415$ mit einem Fehler $\leq 2 \cdot 10^{-3}$.

Die Gleichung (2.6) ist auch für die von uns bereits behandelte Frage der Fehlerfortpflanzung geeignet: Setzt man $x = a^*$ als Näherungswert und $h = \Delta a$ als Fehler, sowie $a = x + h$ als gesuchten Wert, so ist mit $\Delta f(a) := f(a) - f(a^*)$:

$$\Delta f(a) = f'(\alpha) \cdot \Delta a \quad \text{mit } \alpha \in (a^*, a).$$

Eine weitere Anwendung von (2.6) ist die Bernoulli-l'Hospital'sche Regel zur Bestimmung von Grenzwerten. Vorbereitend wird gezeigt:

(2.7) Verallgemeinerter Mittelwertsatz:
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Es gelte dort $g'(x) \neq 0$ für alle x. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Zum **Beweis** genügt es, den Satz von Rolle auf die Funktion

$$(f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x)$$

anzuwenden. Diese Funktion stimmt nämlich an der Stelle $x = a$ und der Stelle $x = b$ überein und hat dort jeweils den Wert $f(b)g(a) - g(b)f(a)$. $\square$

(2.8) Bernoulli-l'Hospitalsche Regel: *Die Funktionen f, g seien für $x \geq a$ differenzierbar, es gelte $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Zudem sei $g'(x) \neq 0$ für $x \geq b$ und $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$. Dann folgt: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert und ist gleich c.*

Kurz: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der zweite Grenzwert existiert.

Dasselbe gilt, wenn unter sonst gleichen Voraussetzungen
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ gilt, d.h. wenn es zu jedem $c > 0$ ein b gibt mit: $f(x) \geq c,\ g(x) \geq c$ für alle $x > b$.

Die Regel gilt ferner, wenn $x \to \infty$ jeweils durch $x \to -\infty,\ x \to a+,\ x \to a-$ oder $x \to a$ ersetzt wird. Der Beweis ist in jedem dieser Fälle analog zum Beweis für $x \to \infty$.

Beweis von (2.8): Zunächst ist $g(x) \neq 0$ für alle genügend großen x. Sonst hätte g beliebig große Nullstellen, und daraus würde mit dem Mittelwertsatz die Existenz beliebig großer Nullstellen von g' folgen. Dies aber wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung $g'(x) \neq 0$ für $x \geq b$.

Ist nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - c \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } z > N.$$

Daraus folgt mit (2.7)

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}-c\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } x,y>N,\ x\neq y.$$

Falls nun $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ ist, folgt wegen $\lim_{y\to\infty} \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ auch

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-c\right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

und daraus die Behauptung.

Falls $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ ist, so haben wir

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\left(\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}\right)\cdot\left(\frac{f(x)-f(y)}{f(x)}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\left(1-\frac{f(y)}{f(x)}\right)^{-1}.$$

Der zweite und der dritte Faktor dieses Produkts streben für $x\to\infty$ gegen 1. Für genügend große x folgt daher

$$\left|\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\left(1-\frac{f(y)}{f(x)}\right)^{-1}-1\right| \le \frac{\varepsilon}{2|c|+\varepsilon}.$$

Also ist

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| - \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right|\cdot\left|\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\left(1-\frac{f(y)}{f(x)}\right)^{-1}-1\right| \le$$

$$\le \left(|c|+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2|c|+\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$$

(wegen $\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| \le |c|+\frac{\varepsilon}{2}$). Damit folgt

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-c\right| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

und dies beendet den Beweis von (2.8). □

Beispiele:
1. Es ist $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$, wie wir bereits im vorigen Kapitel unter (4.19) gesehen haben.

2. Hier nun ein Beispiel, in dem man erst nach dreimaliger Anwendung von (2.8) zum Ziel kommt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x(\cos x - 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\cos x - x\sin x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{-2\sin x - x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{-3\cos x + x\sin x} = \frac{1}{3}.$$

3. Es ist $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - e^x}{1} = -1$.

Bemerkung: Falls $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht existiert, kann man daraus nicht folgern, dass der entsprechende Grenzwert $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ nicht existiert. Zum Beispiel existiert $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin x}{2x+\cos x} = 1$, aber der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{2+\cos x}{2-\sin x}$ existiert nicht.

3.3 Untersuchung von Funktionen

3.3.1 Nullstellenberechnung von Funktionen

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so stellt man sich oft die Aufgabe der Berechnung einer Nullstelle von f. Ein damit gleichwertiges Problem ist die Berechnung eines **Fixpunkts** von f, d.h. einer Lösung der Gleichung $f(x) = x$ (da dies mit $f(x) - x = 0$ gleichbedeutend ist).

Ein naheliegender Lösungsansatz ist die **Iteration**: Man gibt einen Näherungswert x_0 des gesuchten Fixpunkts vor und definiert für $n \geq 1$ stets $x_n := f(x_{n-1})$. Dies ergibt eine wohldefinierte Folge reeller Zahlen, sofern jedes x_n wieder im Definitionsbereich von f liegt. Falls diese Folge gegen einen Grenzwert $\xi \in [a,b]$ konvergiert, ist ξ eine Lösung der Gleichung $f(\xi) = \xi$. Es gilt nämlich

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\xi).$$

Wir benötigen daher eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz unserer Folge (x_n) (und ein Kriterium, das die Eindeutigkeit des Fixpunkts ξ garantiert). Es gilt der

Satz (3.1): *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(I) \subseteq I$. Es gebe ein $q < 1$, so dass $|f'(x)| \leq q$ für alle $x \in I$ gilt. Ist $x_0 \in I$ beliebig und $x_n := f(x_{n-1})$ für $n \geq 1$, so konvergiert die Folge (x_n) gegen die eindeutige Lösung $\xi \in I$ der Gleichung $f(\xi) = \xi$. Es gilt die Fehlerabschätzung*

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|.$$

Bemerkung: Das Verfahren konvergiert um so schneller, je kleiner q ist. Ist die Gleichung $F(x) = 0$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion F zu lösen, so kann man manchmal schnelle Konvergenz durch folgende Umformungen erreichen:

Sei x^* ein Näherungswert der gesuchten Lösung x von $F(x) = 0$. Es sei $F'(x^*) =: c \neq 0$. Wir setzen $f(x) := x - \frac{1}{c}F(x)$. Dann gilt

$$F(\xi) = 0 \Longleftrightarrow f(\xi) = \xi.$$

Es ist aber $f'(x^*) = 1 - \frac{F'(x^*)}{c} = 0$. Dies bedeutet, dass $|f'(x)|$ klein ist, falls x nahe bei x^* liegt (vorausgesetzt, f ist stetig differenzierbar). Dies ist genau die Forderung $|f'(x)| \leq q$ aus (3.1).

Beweis von (3.1): Zunächst folgt aus dem Mittelwertsatz

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$$

für $x, y \in I$. Insbesondere ist

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq q|x_n - x_{n-1}|,$$

und mit Induktion über n folgt:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q^n|x_1 - x_0| \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Es ist $x_{n+1} = x_0 + \sum_{k=0}^{n}(x_{k+1} - x_k)$, und daraus folgt nach dem Majorantenkriterium die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty}(x_{k+1} - x_k)$. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n =: \xi$ existiert also.

Weiter folgt: Ist I ein abgeschlossenes Intervall, in dem alle x_n liegen, so ist $\xi \in I$ und außerdem $f(\xi) = \xi$. Die Zahl ξ ist also tatsächlich ein Fixpunkt von f.

Um die Eindeutigkeit dieses Fixpunkts aus I zu zeigen, nehmen wir an, es sei auch $\eta \in I$ mit $f(\eta) = \eta$. Dann folgt

$$|\xi - \eta| \leq |f(\xi) - f(\eta)| \leq q|\xi - \eta|.$$

Wegen der Voraussetzung $q < 1$ ist daher $|\xi - \eta| = 0$, d.h. $\xi = \eta$.

Es ist nur noch die Fehlerabschätzung zu zeigen. Es gilt zunächst
$|x_{n+k} - x_{n+k-1}| \leq q^k|x_n - x_{n-1}|$ für $n, k \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$\xi - x_n = \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n+k} - x_{n+k-1})$$

(denn es ist $\xi = x_0 + \sum_{k=0}^{\infty}(x_{k+1} - x_k)$ und $x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k-1} - x_k)$). Daraus folgt

$$|\xi - x_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} q^k|x_n - x_{n-1}| = \frac{q}{1-q} \cdot |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|.$$

Damit ist (3.1) bewiesen. □

Beispiel: Wir wollen das Maximum der Funktion $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{x^5(e^{1/x} - 1)}$$

bestimmen (mit $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$). Für $x > 0$ ist

$$F'(x) = \frac{-5x^4(e^{1/x} - 1) - x^3 e^{1/x}}{x^{10}(e^{1/x} - 1)^2}.$$

Wir suchen eine Lösung der Gleichung $F'(x) = 0$, also von $5x(e^{1/x} - 1) - e^{1/x} = 0$. Mit der Substitution $t := 1/x$ ergibt sich daraus die einfachere Gleichung

$$5(1 - e^{-t}) = t.$$

Wir haben also mit $f(t) := 5(1 - e^{-t})$ die Gleichung $f(t) = t$ zu lösen.

Behauptung: $f(t) = t$ hat genau eine Lösung t^* in $\mathbb{R}_+$. Weiter gilt $4 \leq t^* \leq 5$.

Denn es ist $f'(t) = 5e^{-t}$ und daher $f'(t) > 1$ für $t < \log 5$. Im Intervall $[0, \log 5]$ ist $f(t) - t$ streng monoton wachsend. Weiter ist $f(0) = 0$ und daher $f(t) > t$ für alle $t \in (0, \log 5]$. Ist $t > \log 5$, so $f'(t) < 1$, und daher ist $f(t) - t$ in $[\log 5, \infty)$ streng monoton fallend. Somit hat $f(t) - t$ höchstens eine Nullstelle in $[\log 5, \infty)$.

Nun gilt $f(4) = 4,90\ldots > 4$ und $f(5) = 4,96\ldots < 5$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also eine Nullstelle t^* von $f(t) - t$ im Intervall $[4, 5]$.

Sei $q := \sup_{4 \leq t \leq 5} |f'(t)| = f'(4) = 5 \cdot e^{-4} = 0,09157\ldots$. Dann ist $\frac{q}{1-q} = 0,1008\ldots$, und daher bildet

$$t_0 = 5, \quad t_{n+1} := f(t_n)$$

eine gegen t^* konvergente Folge (t_n). Es gilt dabei die Fehlerabschätzung

$$|t^* - t_n| \leq 0,101|t_n - t_{n-1}|$$

und daher $t^* = 4,965114 \pm 10^{-6}$.

Die Lösung des ursprünglichen Problems ist daher durch

$$x^* = \frac{1}{t^*} = 0,2014052 \pm 10^{-7}$$

gegeben. Wegen $\lim_{x \to 0+} F(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$ hat F an der Stelle x^* auch das einzige Maximum.

Bemerkung: Nullstellen stetiger Funktionen lassen sich oft mit dem **Intervallhalbierungsverfahren** berechnen. Hierzu wählt man $a < b$ so, dass $f(a) < 0 < f(b)$ gilt. Ist f stetig, so hat f nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle zwischen a und b. Ist f in $[a, b]$ überdies streng monoton, so ist diese Nullstelle eindeutig bestimmt. Sie lässt sich, wie wir bei der Wurzelberechnung gesehen haben, mit fortgesetzter Intervallhalbierung beliebig genau berechnen.

Schnellere Konvergenz erreicht man meistens mit dem sog. **Newton-Verfahren**. Die Idee ist dabei folgende: Man ersetzt die Funktion $y = f(x)$ durch die Sekante

$$y = g(x) := f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

bzw. durch die Tangente

$$y = h(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Anstelle von $f(x) = 0$ berechnet man dann eine Lösung von $g(x) = 0$ bzw. $h(x) = 0$. Es stellt sich dabei die Frage, welcher Fehler maximal auftritt. Sei ξ die gesuchte Nullstelle und sei $f'(x) \neq 0$ in dem gegebenen Intervall $[a, b]$.

Es ist $-f(a) = f(\xi) - f(a) = f'(\eta)(\xi - a)$ (mit $\eta \in (a, \xi)$), so dass $\xi = a - \frac{f(a)}{f'(\eta)}$ gilt. Die Frage, wie die Näherungslösungen aussehen, lässt sich nun wie folgt beantworten:

Genau dann ist $h(x) = 0$, wenn $f(a) + f'(a)(x - a) = 0$, d.h. $x - a = -\frac{f(a)}{f'(a)}$ ist. Dies ist gleichbedeutend mit

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Genau dann ist $g(x) = 0$, wenn $f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) = 0$ ist, d.h.

$$x - a = \frac{-f(a)}{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}.$$

Also: Die Näherungslösungen sind stets von der Gestalt

$$a - \frac{f(a)}{f'(\zeta)}$$

mit $\zeta = a$ beim Tangentenverfahren und mit $f'(\zeta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ beim Sekantenverfahren.

Der Fehler ist dann

$$|\xi - x| = \left| \frac{f(a)}{f'(\eta)} - \frac{f(a)}{f'(\zeta)} \right| = \left| f(a) \cdot \frac{f'(\zeta) - f'(\eta)}{f'(\eta) f'(\zeta)} \right| =$$

$$= \left| \frac{f(a) f''(\vartheta)(\zeta - \eta)}{f'(\eta) f'(\zeta)} (\zeta - \eta) \right| = \left| \frac{f''(\vartheta)}{f'(\eta)} (\xi - a)(\zeta - \eta) \right|,$$

mit $\xi = a - \frac{f(a)}{f'(\eta)}$ und mit einem Wert $\vartheta \in (\eta, \xi)$. Gilt jetzt $|f'(x)| \geq k > 0$ und $|f''(x)| \leq K$ auf $[a, b]$, so folgt

$$|\xi - x| \leq \frac{K \cdot |b - a|^2}{k},$$

bzw. bei dem Tangentenverfahren (hier wird b nicht benötigt)

(3.2) $\quad |\xi - x| = \left| \frac{f(a)}{f'(\eta)} - \frac{f(a)}{f'(a)} \right| = \left| f(a) \cdot \frac{f'(a) - f'(\eta)}{f'(\eta) \cdot f'(a)} \right| \leq$

$$\leq \left|\frac{f''(\vartheta)}{f'(a)}\right| \cdot |\xi - a|^2 \leq \frac{K}{k}\left|\frac{f(a)}{f'(\eta)}\right|^2 \leq \frac{K}{k^3}|f(a)|^2,$$

wobei ϑ in (a, η) und η in (a, ξ) liegt, so dass $|a - \eta| \leq |\xi - a|$ ist.

Beispiel (3.3): Sei $c \in \mathbb{R}_+,\ m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$. Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = x^m - c$. Dann ist

$$f'(x) = m \cdot x^{m-1},\ f''(x) = m(m-1) \cdot x^{m-2} > 0 \quad \text{für } x > 0$$

und daher

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^m - c}{mx^{m-1}} = \frac{1}{m}\left((m-1)x + \frac{c}{x^{m-1}}\right).$$

Speziell für $m = 2$ erhält man, mit x_0 beliebig so dass $x_0^m > c$ gilt, die Folge

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right).$$

Dies ist eine bekannte, schnell konvergente Folge mit Grenzwert $\sqrt{c}$, die seit mehr als 4000 Jahren zur Berechnung von $\sqrt{c}$ verwendet wird.

Bemerkung: Man überlegt sich leicht, dass für $x_0 \in \mathbb{R}_+$ mit $m \geq 2$ die Folge

$$x_{n+1} := \frac{1}{m}\left((m-1)x_n + \frac{c}{x_n^{m-1}}\right)$$

gegen $\sqrt[m]{c}$ konvergiert (vgl. [1], §17).

3.3.2 Extremwerte und Konvexität

(3.4) Satz: *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine in dem Punkt $a \in I$ zweimal differenzierbare Funktion.*

Ist $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$ (bzw. < 0), so hat f an der Stelle a ein relatives Minimum (bzw. Maximum).

Beweis: Nach Voraussetzung ist $f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} > 0$. Damit folgt

$$\frac{f'(x)}{x-a} = \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0 \quad \text{für } |x - a| < \varepsilon,\ x \neq a,$$

falls ε genügend klein gewählt ist. Also ist $f'(x) < 0$ für $a - \varepsilon < x < a$ und $f'(x) > 0$ für $a < x < a + \varepsilon$. Nach dem Mittelwertsatz ist $f(x) > f(a)$ für $a - \varepsilon < x < a$ und ebenso für $a < x < a + \varepsilon$. Damit ist Satz (3.4) bewiesen. □

Es stellt sich die Frage, was man im Fall $f''(a) = 0$ aussagen kann. Dann kann ein Extremwert im Punkt a vorliegen, muss aber nicht, wie das Beispiel

$$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad a = 0$$

zeigt. Für gerade n hat man dann ein absolutes und relatives Minimum, für ungerade n hingegen kein relatives Extremum.

Man muss im Fall $f'(a) = f''(a) = 0$ auch noch die höheren Ableitungen im Punkt a betrachten. Wir definieren zunächst induktiv

$$f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = f'',\ \ldots,\ f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

für $n \geq 0$. Ist nun $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{n-1}(a) = 0$ und $f^{(n)}(a) > 0$, so folgt

$$f^{(n-1)}(x) < 0 \quad \text{für } a - \varepsilon < x < a$$

und

$$f^{(n-1)}(x) > 0 \quad \text{für } a < x < a + \varepsilon.$$

Wenn man nun ähnlich wie im Beweis von Satz 3.4 weiter zurückrechnet, erhält man folgende Aussage: f hat ein relatives Maximum (bzw. Minimum) bei a, wenn n **gerade** ist und $f^{(n)}(a) < 0$ (bzw. $f^{(n)}(a) > 0$) ist. Wenn n ungerade ist, liegt bei a kein relatives Extremum vor.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f(x) = 3x^3 + 4x^2$ auf $[-1, 1]$. Es ist dann $f'(x) = 9x^2 + 8x$ mit den beiden Nullstellen $x = 0$ und $x = -\frac{8}{9}$.

Die zweite Ableitung $f''(x) = 18x + 8$ hat an der Stelle 0 den Wert $8 > 0$ und an der Stelle $-\frac{8}{9}$ einen Wert < 0. Also ist $f(0) = 0$ ein relatives (in diesem Fall auch absolutes) Minimum von f in $[-1, 1]$. Weiter ist $f(-\frac{8}{9}) = \frac{256}{243}$ ein relatives Maximum von f. Hingegen ist dies kein absolutes Maximum, denn f nimmt das absolute Maximum am Randpunkt 1 an ($f(1) = 7$).

Wir sehen an diesem Fall, dass man bei Funktionen auf Intervallen $I \neq \mathbb{R}$ bei der Suche nach Extrema auch die Randpunkte mit betrachten muss: Eventuell liegt an einem Randpunkt ein relatives oder sogar absolutes Extremum vor, obwohl an diesem Randpunkt die erste Ableitung nicht verschwindet.

Wir definieren nun die **Konvexität** bzw. **Konkavität** einer reellwertigen Funktion.

(3.5) Definition: *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* **konvex** *(bzw.* **konkav***) in I, wenn für irgend zwei Werte $x_1, x_2 \in I$ die Sekante zwischen x_1 und x_2 oberhalb (bzw. unterhalb) der Kurve $y = f(x)$ verläuft. Genauer: wenn für je drei Werte $x_1 < x < x_2$ aus I stets gilt*

$$f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \geq f(x).$$

d.h.

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2) \geq (x_2 - x_1)f(x)$$

oder auch

(3.6) $\quad \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$

(bzw. jeweils mit umgekehrtem Vorzeichen im Fall der Konkavität).

Bemerkung: (3.6) besagt genau: Die Sekante zwischen x_1 und x hat höchstens (bzw. mindestens) eine so große Steigung wie die zwischen x und x_2.

(3.7) Satz: *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. f ist genau dann konvex (bzw. konkav), wenn f' monoton steigt (bzw. fällt). Falls f'' existiert, heißt dies: genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ (bzw. ≤ 0) für alle $x \in I$ gilt.*

Beweis: Aus (3.6) folgt

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

für $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Es folgt also, wie behauptet, $f'(x_1) \leq f'(x_3)$.

Ist umgekehrt f' monoton wachsend, so folgt die Behauptung (3.6) mit dem Mittelwertsatz. Damit ist Satz (3.7) bewiesen. □

Bemerkung (3.8): Die Stellen, an denen f'' das Vorzeichen wechselt, die Funktion f also ihren Charakter der Konvexität oder Konkavität ändert, heißen **Wendepunkte**.
Ist f'' stetig, so sind dies notwendig Nullstellen von f''. Das Beispiel $f(x) = x^4$ zeigt: diese Bedingung ist nicht hinreichend für die Existenz eines Wendepunkts. Nicht jede Nullstelle von f'' liefert also einen Wendepunkt.

Mit dem Begriff der Konvexität lassen sich wichtige Ungleichungen herleiten:

(3.9) *Ist f konvex auf $\mathbb{R}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ für $1 \leq i \leq n$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, und sind für $1 \leq i \leq n$ außerdem alle $x_i \in \mathbb{R}$, so gilt*

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Wir führen den **Beweis** durch Induktion nach n.
Sei zunächst $n = 2$, d.h. $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Weiter sei $x := \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$. Dann folgt, sofern $x_1 \neq x_2$ ist,

$$\lambda_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \lambda_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Die Forderung der Konvexität von f besagt dann genau

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2).$$

Nun der Induktionsschluss von $n-1$ nach n. Es gilt

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) = f\left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1}} x_i + \lambda_n x_n\right) \leq$$

$$\leq (\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1}} x_i\right) + \lambda_n f(x_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

(der letzte Schritt verwendet die Induktionsannahme). Damit ist (3.9) bewiesen. □

Beispiel: Sei $f(x) = -\ln x$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}_+$. Dann ist $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. Setzen wir nun für alle $i = 1, \ldots, n$ jeweils $\lambda_i = \frac{1}{n}$, so ergibt sich aus (3.9)

$$-\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i.$$

Daraus ergibt sich weiter

(3.10) $\quad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$

Dies ist die **Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel**, die wir im Spezialfall $n = 2$ schon in Abschnitt 1.4 bewiesen haben.

Kapitel 4

Integralrechnung

4.1 Das unbestimmte Integral

Bisher haben wir zu einer gegebenen Funktion f die Ableitung f' (sowie höhere Ableitungen) bestimmt. In diesem Kapitel stellen wir uns die umgekehrte und zumeist schwierigere Aufgabe, eine Funktion zu **integrieren**: Zu einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ (bzw. $I \to \mathbb{C}$) suchen wir eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) mit

(1.1) $\quad F'(x) = f(x) \quad$ für alle $x \in I$.

Dies bedeutet anschaulich, dass eine Kurve aus den bekannten Werten ihrer Steigung zu rekonstruieren ist. Physikalisch gesehen ist dies die gleiche Aufgabe wie die Aufstellung einer Bewegungsgleichung bei Bekanntsein aller Momentangeschwindigkeiten. (Der Unterschied an Schwierigkeit zwischen Differentiation und Integration lässt sich am besten mit folgendem Ausspruch illustrieren: „Differenzieren ist ein Handwerk, Integrieren ist eine Kunst.“)

(1.2) Satz: *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sind $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) differenzierbar und gilt $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ für $x \in I$, so folgt*

$$F_2(x) = F_1(x) + c$$

mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$).

Beweis: Sind die Funktionen F_1, F_2 reellwertig, so folgt dies direkt durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf $F_1 - F_2$. Sind die F_i komplexwertig, so definieren wir

$$u_k := \text{Re } F_k, \quad v_k := \text{Im } F_k$$

für $k = 1, 2$. Dann gilt $u_2 = u_1 + a$, $v_2 = v_1 + b$ mit reellen Konstanten a, b. Also ist $F_2 = F_1 + c$ mit $c = a + bi$. Damit ist Satz (1.2) bewiesen. □

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ oder $I \to \mathbb{C}$ eine Funktion, zu der eine Funktion F mit $F' = f$ existiert, so nennt man F eine **Stammfunktion** oder ein **unbestimmtes**

Integral von f im Intervall I. Man schreibt in diesem Fall

(1.3) $\quad F(x) = \int f(x)dx.$

Man beachte, dass $\int f(x)dx$ nur bis auf eine additive Konstante (die sogenannte **Integrationskonstante**) festgelegt ist. Daher ist (1.3) eigentlich keine Gleichung, sondern nur eine Kurzschreibweise für die Aussage „F ist Stammfunktion von f". Mit anderen Worten: aus

$$F(x) = \int f(x)dx, \quad G(x) = \int f(x)dx$$

folgt **nicht** $F = G$, sondern es ist nur $F(x) = G(x) + c$ mit einer Konstanten c für alle $x \in I$.

Bemerkung: Nicht jede Funktion hat eine Stammfunktion.

Beispiel: Sei $I = [-1, 1]$. Auf dem Intervall I definieren wir eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ wie folgt: Für $x > 0$ sei $f(x) = 1$, für $x \leq 0$ hingegen $f(x) = -1$.
Wir nehmen an, es gebe eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$. Für alle $x \in (0, 1]$ gilt dann $F(x) = x + c_1$ mit einer gewissen Konstanten $c_1 \in \mathbb{R}$, andererseits ist für alle $x \in [-1, 0]$ dann $F(x) = -x + c_2$ mit $c_2 \in \mathbb{R}$. Andererseits ist F als differenzierbare Funktion natürlich stetig in 0. Daher gilt $c_1 = c_2 =: c$ und damit $F(x) = |x| + c$ für alle $x \in I$. Von dieser Funktion F haben wir aber bereits festgestellt, dass sie im Nullpunkt nicht differenzierbar ist: Widerspruch!

Bemerkung: Wir werden später zeigen, dass jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt.

Wir betrachten nun nochmals die im vorigen Kapitel behandelten Differentiationsregeln und stellen uns die Frage, welche Regeln für die unbestimmte Integration man daraus erhalten kann.

Zunächst gilt offenbar:
(1.4) Haben zwei Funktionen f und g Stammfunktionen, so auch $af + bg$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), und es gilt

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx.$$

(1.5) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$ in jedem der folgenden Fälle:

(i) $x > 0,\ a \neq -1$ beliebig reell,

(ii) $x \in \mathbb{R}$ beliebig, $a = 0, 1, 2, \ldots$ oder

(iii) $x \neq 0,\ a = -2, -3, \ldots$

Damit wissen wir nun insbesondere, dass alle Polynome unbestimmt integriert werden können.

(1.6) $\int \frac{dx}{x} = \log|x|$ in jedem Intervall I, das den Nullpunkt nicht enthält.

(1.7) $\int e^{cx}dx = \frac{1}{c}e^{cx}$ für alle $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ Insbesondere ist $\int e^x dx = e^x$, und indem man $c = \log a$ setzt, erhält man:
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$ für alle $a > 0,\ a \neq 1$.

(1.8) $\int \sin x\ dx = -\cos x, \quad \int \cos x\ dx = \sin x$.

(1.9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ für $|x| < 1$,
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x$.
Man rechnet auch leicht nach, dass $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ gilt, dass sich also diese beiden Stammfunktionen (wie es auch sein muss) nur um eine additive Konstante unterscheiden.

(1.10) $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$,

(1.11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh}\ x$,

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}\ x$ für $x > 1$.

Auch die Produktregel aus Kapitel 3, (1.5), lässt sich in eine Integrationsregel umformen. Dabei ist es aber im allgemeinen nicht möglich, ein unbestimmtes Integral $\int f(x)g(x)dx$ durch $\int f(x)dx$ und $\int g(x)dx$ auszudrücken. Es gilt jedoch folgende wichtige Formel:

(1.12) Produktintegration (oder **partielle Integration**):
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) differenzierbar, und die Funktion $f' \cdot g$ habe eine Stammfunktion über I. Dann hat auch $f \cdot g'$ eine Stammfunktion über I, und es gilt

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx.$$

Diese Aussage folgt direkt aus der Produktregel $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ für die Differentiation.

Beispiele für partielle Integration:

Es ist $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x$.

In ähnlicher Weise ist $\int x \sin x\ dx = -x\cos x + \int \cos x\ dx = \sin x - x\cos x$.

Die partielle Integration ermöglicht auch die Bestimmung einer Stammfunktion des natürlichen Logarithmus: $\int \log x\ dx = \int 1 \cdot \log x\ dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}\ dx = x(\log x - 1)$.

In entsprechender Weise kann man berechnen $\int \arcsin x\ dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

Ebenso kann auch die Kettenregel (Kapitel 3, (1.16)) in eine Integrationsregel umgewandelt werden. Dies ergibt die

(1.13) Substitutionsregel: *Ist $F(y) = \int f(y)dy$ eine Stammfunktion von $f(y)$ und ist $g(x)$ reellwertig und differenzierbar, so ist $F(g(x))$ Stammfunktion von $f(g(x))g'(x)$. D.h.*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy, \quad y = g(x).$$

Beispiel: Es ist

(1.14) $\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b} \int \frac{\frac{1}{b}dx}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1} = \frac{1}{b} \int \frac{dy}{y^2+1} =$

$$= \frac{1}{b} \arctan y = \frac{1}{b} \arctan \frac{x-a}{b},$$

falls $b \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R}$. Wir haben dabei die Substitution $y = \frac{x-a}{b}$ verwendet.

Ein weiteres Beispiel:

(1.15) $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log |g(x)|$

in jedem Intervall, das keine Nullstellen von g enthält.

Man nennt $\frac{g'}{g}$ die **logarithmische Ableitung** von g.

Gilt $g(x) = g_1(x) \cdots g_n(x) = \prod_{i=1}^n g_i(x)$, so folgt:

(1.16) $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \sum_{i=1}^n \log |g_i(x)| = \sum_{i=1}^n \int \frac{g_i'(x)}{g_i(x)} dx.$

Anwendungsbeispiel:

(1.17) $\int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}\ dx = \frac{1}{2} \log((x-a)^2 + b^2)$

für $b \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R}$.

(1.18) $\int \tan x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log|\cos x|$

für Intervalle I, die nicht die Werte $\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots$ enthalten.

Zur Integration rationaler Funktionen benötigt man die sogenannte **Partialbruchzerlegung** (oder **Teilbruchzerlegung**). Gegeben sei hierzu eine rationale Funktion

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_m x^m + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0} = \frac{\sum_{i=1}^m a_i x^i}{\sum_{k=0}^n b_k x^k}.$$

Unser 1. Schritt ist dann die Division mit Rest

$$f = q \cdot g + r \quad \text{mit grad } r < \text{grad } g.$$

Dann ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \quad \text{mit grad } r < \text{grad } g.$$

Man bezeichnet in diesem Fall den Quotienten $\frac{r(x)}{g(x)}$ als eine **echt gebrochen rationale** Funktion.

Es gilt der

(1.19) Satz von der Teilbruchzerlegung (Partialbruchzerlegung) der rationalen Funktionen:
Jede rationale Funktion lässt sich als Summe eines Polynoms und einer echt gebrochen rationalen Funktion schreiben. Jede echt gebrochen rationale Funktion $\frac{r(x)}{g(x)}$ *mit dem Nenner* $g(x) = \prod_{i=1}^{l}(x - a_i)^{m_i}$ *mit paarweise verschiedenen* a_i *lässt sich in der Form*

(1.20) $\quad \frac{r(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{k=1}^{m_i} \frac{c_{ik}}{(x-a_i)^k} \right)$

schreiben.

Zum Beweis: Sei $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von g mit der Vielfachheit m. Dann ist $g(x) = (x-a)^m \cdot h(x)$ mit $h(a) \neq 0$, d.h. a ist keine Nullstelle von h. Wir setzen nun

$$c := \frac{r(a)}{h(a)}.$$

Das Polynom $r(x) - c \cdot h(x)$ hat a als Nullstelle. Also ist $r(x) - c \cdot h(x) = (x-a)s(x)$ mit einem Polynom s, und es folgt

$$\frac{r(x)}{g(x)} = \frac{c}{(x-a)^m} + \frac{s(x)}{(x-a)^{m-1}h(x)}.$$

Nun wendet man das gleiche Verfahren auf den letzten Summanden an und fährt in gleicher Weise fort, bis der Faktor $(x-a)$ im Nenner nicht mehr auftritt. In gleicher Weise behandelt man dann die nächste reelle oder komplexe Nullstelle des Nenners, so lange, bis kein Rest mehr bleibt. Dann haben wir eine Darstellung der ursprünglichen Funktion $\frac{r(x)}{g(x)}$ in der gesuchten Form (1.20). □

Wir stellen uns nun die Frage, wie man im konkreten Fall konstruktiv vorgeht, um eine Partialbruchzerlegung herzustellen. Man tut dies, indem man sukzessive die in (1.20) auftretenden Koeffizienten c_{ik} berechnet.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion $\frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)}$. Sie lässt sich nach (1.19) in der Form $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$ schreiben (da der Nenner nur einfache Nullstellen hat). Die zu berechnenden Koeffizienten sind a, b, c.

Es ist zunächst $a = \frac{x(x^2+1)}{x(x+1)(x-1)} - x\frac{b}{x+1} - x\frac{c}{x-1}$. Indem man den Wert $x = 0$ in diese Gleichung einsetzt, erhält man

$$a = \frac{0^2+1}{(0+1)(0-1)} = -1.$$

Weiter ist nun

$$b = \frac{(-1)^2+1}{-1\cdot(-1-1)} = 1, \quad c = \frac{1^2+1}{1(1+1)} = 1.$$

Wir haben also insgesamt

$$\frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}.$$

Eine andere Möglichkeit ist der Ansatz

$$\frac{r(x)}{g(x)} = \sum_{i,k} \frac{c_{ik}}{(x-a_i)^{k_i}}$$

mit den noch zu bestimmenden c_{ik}. Die Multiplikation mit $g(x)$ liefert dann eine Gleichung zwischen zwei Polynomen (die daher an unendlich vielen Stellen übereinstimmen). Anschließend kann man einen Koeffizientenvergleich durchführen und erhält damit ein Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten c_{ik}.

Beispiel: Gegeben sei

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^4+1}{x^2(x-1)^3}.$$

Wir machen den Ansatz

$$\frac{x^4+1}{x^2(x-1)^3} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{x-1}.$$

Zu lösen ist also die Gleichung

$$x^4 + 1 = a(x-1)^3 + bx(x-1)^3 + cx^2 + dx^2(x-1) + ex^2(x-1)^2.$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt folgendes Gleichungssystem:

(1) $1 = b + e$
(2) $0 = a - 3b + d - 2e$
(3) $0 = -3a + 3b + c - d + e$
(4) $0 = 3a - b$
(5) $1 = -a$

Aus (5) folgt $a = -1$ und aus (4) weiter $b = -3$. Aus (1) folgt nun $e = 4$, aus (2) also weiter $d = 0$. Aus (3) folgt schließlich $c = 2$. Damit haben wir das Endergebnis

$$\frac{x^4+1}{x^2(x-1)^3} = -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{4}{x-1}.$$

Mit dem Verfahren der Partialbruchzerlegung ist es im Prinzip möglich, jede gegebene reellwertige gebrochen rationale Funktion zu integrieren. Ist nämlich

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{mit reellen Polynomen } P(x), Q(x),$$

so führt man zunächst die Division mit Rest aus. OBdA können wir daher annehmen, dass grad $P <$ grad Q gilt. Nun ist

$$Q(x) = \prod_i (x-a_i)^{m_i} \cdot \prod_k \left[(x-b_k)(x-\overline{b_k})\right]^{n_k}$$

mit $a_k \in \mathbb{R},\ b_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dies ist die (stets mögliche) Zerlegung des Polynoms Q in komplexe Linearfaktoren.

Es ist nun $\frac{P(x)}{Q(x)}$ eine Summe von Termen der Form

$$\frac{c}{(x-a_i)^m} \quad (1 \le m \le m_i)$$

sowie

$$\frac{c}{(x-b_k)^n},\ \frac{c}{(x-\overline{b_k})^n}.$$

Jeder dieser Terme lässt sich leicht integrieren und ergibt damit wieder einen Term von einer uns bekannten Form. Genauer: die Integration führt auf Terme der Form

$$\frac{c}{(x-a_i)^m} \quad (1 \le m \le m_i - 1)$$

sowie

$$\frac{c}{(x-b_k)^m},\ \frac{c}{(x-\overline{b_k})^m} \quad (1 \le n \le n_k - 1)$$

und auch

$$c \cdot \log|x-a_i|, \quad c \cdot \log((x-u_k)^2 + v_k^2), \quad c \cdot \arctan\frac{x-u_k}{v_k} \quad \text{wenn } b_k = u_k + iv_k.$$

Es ist nämlich

$$\int \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{-1}{(n-1)(x-c)^{n-1}} \quad \text{für } n = 2, 3, \ldots$$

für reelle c, ebenso aber auch für komplexe c, wie man durch Differentiation der rechten Seite leicht nachweist.

Für reelle c ist außerdem $\int \frac{dx}{x-c} = \log|x-c|$, und für komplexe $c = a+bi$ gilt

$$\int \frac{dx}{x-c} = \int \frac{x-a+bi}{(x-a)^2+b^2}dx = \int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}dx + ib\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\log((x-a)^2+b^2) + i\arctan\frac{x-a}{b},$$

wie aus (1.14) bis (1.17) folgt.

Insgesamt kann man also bei der Integration einer rationalen Funktion $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ wie folgt vorgehen: Zunächst kann man durch Division erreichen, dass P einen kleineren Grad als Q hat. Man mache den Ansatz

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{1}{S(x)}\sum_{j=0}^{s-1}\alpha_j x^j + \sum_i \beta_i \log(x-a_i) +$$

$$+\sum_k \left[\gamma_k \log((x-u_k)^2+v_k^2) + \delta_k \arctan\frac{x-u_k}{v_k}\right]$$

mit dem Polynom vom Grad s

$$S(x) = \prod_i (x-a_i)^{m_i-1}\cdot\prod_k((x-b_k)(x-\overline{b_k}))^{n_k-1}$$

und bestimme, indem man beide Seiten differenziert, die unbekannten Koeffizienten $\alpha_j,\ \beta_i,\ \gamma_k$ und δ_k.

Beispiel: Wir machen den Ansatz

$$\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{ax+b}{x^2+x+1} + c\log(x^2+x+1) + d\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}.$$

Durch Differentiation auf beiden Seiten ergibt sich

$$\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-ax^2-2bx+a-b}{(x^2+x+1)^2} + \frac{c(2x+1)}{x^2+x+1} + \frac{d\sqrt{\frac{3}{4}}}{x^2+x+1}.$$

Dies bringt man nun auf den Nenner $(x^2+x+1)^2$ und vergleicht dann im Zähler die Koeffizienten von $x^3,\ x^2,\ x$ und 1. So erhält man die vier Gleichungen $c=0,\ -a+d\sqrt{\frac{3}{4}}=0,\ -2b+d\sqrt{\frac{3}{4}}=1$ und $a-b+d\sqrt{\frac{3}{4}}=-1$. Die eindeutige Lösung dieser Gleichungen lautet

$$a=b=-1,\ c=0,\ d=-\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Wir haben damit das Ergebnis

$$\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{-x-1}{x^2+x+1} - \sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}.$$

Mit Hilfe der Substitutionsregel lassen sich einige Klassen von Integraltypen auf die Integration rationaler Funktionen zurückführen. Hier einige Beispiele:

(1.21) Ist $f(x) = R(e^{ax})$ ein rationaler Ausdruck in e^{ax} mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so ist

$$\int R(e^{ax})dx = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{R(e^{ax})}{e^{ax}} a \cdot e^{ax} dx = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{R(y)}{y} dy$$

mit $y = e^{ax}$.

(1.22) Ist $f(x) = R(\sin x, \cos x)$ ein rationaler Ausdruck in $\sin x$ und $\cos x$, so kann man sich auf ein Intervall der Länge 2π beschränken, etwa auf $-\pi < x < \pi$. Dort setzt man $y = \tan\frac{x}{2}$.

Es folgt (wie man leicht nachrechnet) $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$, $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ sowie $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{2}$. Daher ist

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx = 2 \cdot \int \frac{R\left(\frac{2y}{1+y^2},\ \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)}{1+y^2} dy$$

mit $y = \tan\frac{x}{2}$.

(1.23) Ist $f(x) = R(x, \sqrt[k]{ax+b})$ rational in x und $\sqrt[k]{ax+b}$ mit $a \neq 0$, so substituieren wir $y := \sqrt[k]{ax+b}$. Es ist dann

$$x = \frac{y^k - b}{a}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{k \cdot y^{k-1}}.$$

Daher ist

$$\int R(x,\ \sqrt[k]{ax+b})dx = \frac{k}{a}\int R\left(\frac{y^k-b}{a}, y\right) y^{k-1} dy$$

(mit $y = \sqrt[k]{ax+b}$).

(1.24) Ist $f(x) = R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ rational in beiden Argumenten und $a \neq 0$, so substituieren wir $y := x + \frac{b}{2a}$. Auf diese Weise wird das mittlere Glied unter der Wurzel weggeschafft, und es bleibt

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(y^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right).$$

Anschließend substituiere man: $z = ky$ mit passendem k. Dies ergibt

$$\int R(z, \sqrt{\pm 1 \pm z^2})dz.$$

Je nachdem, welche Vorzeichenkombination hier vorliegt (die Kombination zweier Minuszeichen ergibt keinen Sinn für irgendein z, scheidet also aus), kann man verschiedene Substitutionen durchführen:

$$z = \sin t,\ \ z = \sinh t \text{ bzw. } z = \cosh t.$$

Damit kann man unser Integral auf einen der Integraltypen (1.21) oder (1.22) zurückführen.

(1.25) In entsprechender Weise kann man auch $\int R(z, \sqrt{1-z^2})dz$ in ein Integral über eine rationale Funktion transformieren, indem man

$$z = \frac{2u}{1+u^2},$$

also $u = \frac{1}{z} - \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1}$ setzt. Es ist dann nämlich $\sqrt{1-z^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, wie man leicht nachrechnet.

Philosophie des Ganzen:
Wir haben bei unseren Integrationsregeln stets **elementare Funktionen** betrachtet. Man definiert eine **elementare Funktion** als eine Abbildung, die sich aus den Funktionen

$$x,\ e^x,\ \log x,\ \sin x,\ \cos x$$

durch rationale Rechenoperationen, durch Einsetzen einer Funktion in eine andere und durch Auflösung algebraischer Gleichungen erhalten lassen. Auf Grund der Differentiationsregeln aus dem letzten Kapitel gilt folgender Satz:

Metatheorem: *Die Ableitung einer jeden elementaren Funktion ist wieder elementar.*

Bemerkenswerterweise ist die Umkehrung des Metatheorems nicht richtig: Es gibt elementare Funktionen, deren unbestimmtes Integral keine elementare Funktion ist.

Beispiel: $f(x) = \frac{e^x}{x}$ ist eine elementare Funktion, von der man zeigen kann, dass ihr unbestimmtes Integral keine elementare Funktion ist - obwohl dies für

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| \quad \text{und} \quad \int e^x dx = e^x$$

der Fall ist.

4.2 Das bestimmte Integral

Wir wollen das bestimmte Integral nach **B. Riemann** (1826-1866) einführen.

Riemann hat tiefliegende Sätze in der Geometrie, der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher und der Theorie der Primzahlenverteilung bewiesen. Er hinterließ auch eine berühmte, bis heute unbewiesene Vermutung: Sei

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

die **Riemannsche Zetafunktion** (das Produkt der rechten Seite erstreckt sich über alle Primzahlen p). Wir werden am Schluss dieses Kapitels sehen, dass auf diese Weise für $s > 1$ tatsächlich eine (reellwertige) Funktion definiert ist. Diese lässt sich mit Hilfe einer Funktionalgleichung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortsetzen.

Die bis heute ungeklärte **Riemannsche Vermutung** besagt: Alle komplexen Nullstellen s der Riemannschen Zetafunktion mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ haben den Realteil $\frac{1}{2}$.

Die Ausgangsfrage bei der Riemannschen Einführung des bestimmten Integrals ist das Problem der Flächenmessung bei „krummlinigen“ Objekten. Genauer: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b \in I,\ a < b$. Sei dann $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Dann setzen wir

(2.1) $\quad B := \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Wir stellen uns die Frage, wie der **Flächeninhalt** von B zu definieren ist, d.h. wir interessieren uns für eine Definition der Fläche unter der Kurve $f(x)$ zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$.

Die von **Leibniz** eingeführte Schreibweise für diesen Flächeninhalt ist

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Wir stellen an den zu definierenden Flächeninhalt zwei plausible Forderungen:
(2.2) Für $a < b < c,\ a, b, c \in I$ soll gelten

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

(2.3) Ist $u \leq f(x) \leq v$ für $a \leq x \leq b$, so gilt:

$$u(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq v(b-a).$$

Diese Forderung lässt sich mit $z := \frac{u+v}{2},\ t := \frac{v-u}{2}$ noch etwas umformen und ergibt dann (2.4):

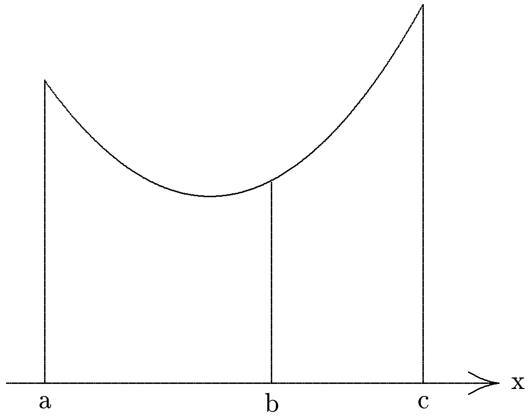

Abbildung 4.1: Nach Forderung (2.2) soll $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ gelten.

(2.4) Gilt $|f(x) - z| \leq t$ für $a \leq x \leq b$, so ist

$$\left| \int_a^b f(x)dx - z(b-a) \right| \leq t|b-a|.$$

Es ist nämlich $-\frac{v-u}{2}(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx - \frac{u+v}{2}(b-a) \leq \frac{v-u}{2}(b-a)$ gleichbedeutend mit $u(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq v(b-a)$. Die Formulierung (2.4) hat gegenüber (2.3) den Vorteil, später auch für komplexwertige Funktionen sinnvoll zu sein.

Annahme: Für komplexwertiges f auf einem Intervall I sei für $a < b,\ a, b \in I$ der Flächeninhalt $\int_a^b f(x)dx \in \mathbb{C}$ bereits definiert, und zwar mit den Eigenschaften (2.2) und (2.4). Was lässt sich dann für $\int_a^b f(x)dx$ folgern?

Man zerlegt $[a, b]$ mittels $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ in Teilintervalle $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ und wählt jeweils in $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ ein Element ξ_ν. Eine solche Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit Zwischenpunkten ξ_ν wird im Folgenden mit

$$\mathcal{Z} = (x_0, \cdots, x_n;\ \xi_1, \cdots, \xi_n)$$

bezeichnet. Der zu definierende Flächeninhalt $\int_a^b f(x)dx$ wird dann durch die **Riemannsche Summe**

$$R(f, \mathcal{Z}) := \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})$$

approximiert. Genauer gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x)dx = \sum_{\nu=1}^{n} (f(\xi_\nu) + \delta_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})$$

(wobei wir (2.2) und (2.4) verwenden), und hierbei ist

$$|\delta_\nu| \cdot |x_\nu - x_{\nu-1}| = \left| \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x)dx - f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) \right| \leq$$

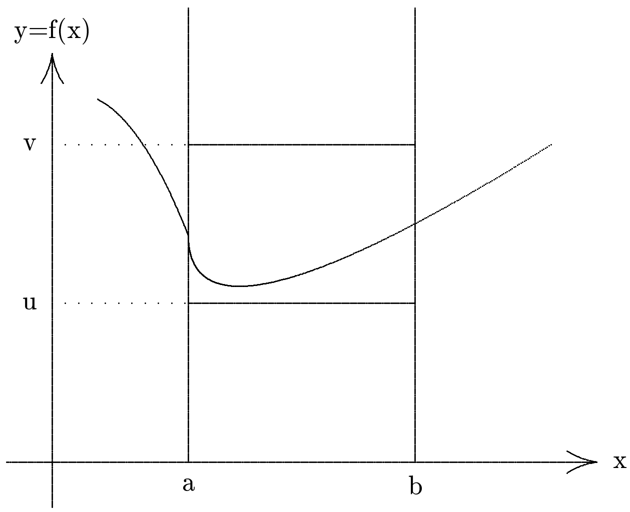

Abbildung 4.2: Dies veranschaulicht die von uns geforderten Abschätzungen aus (2.3).

$$\leq \sup_{x\in[x_{\nu-1},x_\nu]} |f(x)-f(\xi_\nu)|(x_\nu-x_{\nu-1}) \leq \sup_{x,x'\in[x_{\nu-1},x_\nu]} |f(x)-f(x')|\cdot(x_\nu-x_{\nu-1}).$$

Wir definieren nun für beliebige Teilintervalle $[c,d]\subseteq I$ die **Schwankung** von f in $[c,d]$: Es sei

(2.5) $\quad s(f;c,d) := \sup_{x,x'\in[c,d]} \; |f(x)-f(x')|$

die maximale Differenz der Bilder zweier Werte x,x' aus $[c,d]$. Dann gilt

$$|\delta_\nu| \leq s(f;x_{\nu-1},x_\nu)$$

und

$$\left|\int_a^b f(x)dx - R(f,\mathcal{Z})\right| \leq \sum_{\nu=1}^n s(f;x_{\nu-1},x_\nu)\cdot(x_\nu-x_{\nu-1}).$$

(2.6) Definition: *Die Summe*

$$S(f,\mathcal{Z}) := \sum_{\nu=1}^n s(f;x_{\nu-1},x_\nu)(x_\nu-x_{\nu-1})$$

nennt man die **Schwankungssumme** *von f bezüglich $\mathcal{Z}$.*

Die Idee dabei ist folgende: Gibt es Zerlegungen des Intervalls I mit beliebig kleiner Schwankungssumme, so ermöglichen unsere bisherigen Ungleichungen eine beliebig genaue Berechnung von $\int_a^b f(x)dx$. Wir definieren daher nun:

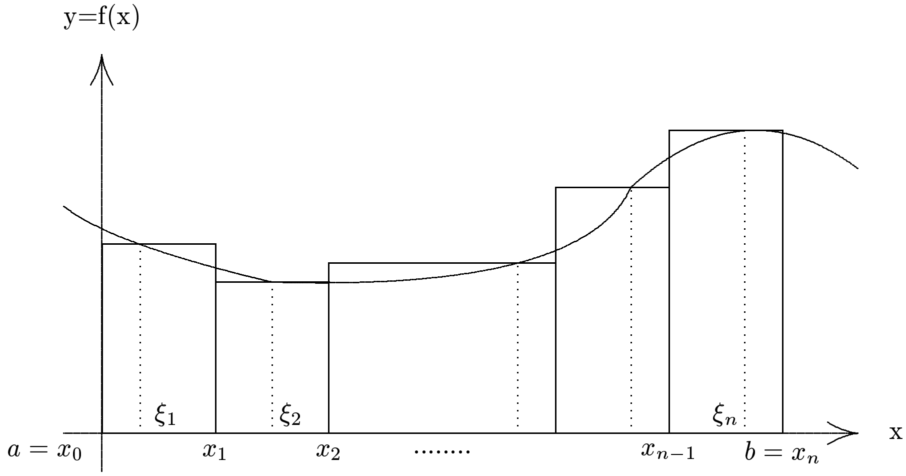

Abbildung 4.3: Dieses Bild veranschaulicht im reellen Fall die Annäherung des bestimmten Integrals durch Riemannsche Summen.

(2.7) Definition: *Eine beschränkte Funktion f heißt über $[a, b]$* **integrierbar**, *falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ existiert mit*

$$S(f, \mathcal{Z}) \leq \varepsilon.$$

Ist also f auf einem Intervall $[a, b]$ integrierbar, so gibt es eine Folge $(\mathcal{Z}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen mit

$$\lim_{p \to \infty} S(f, \mathcal{Z}_p) = 0.$$

Für jede solche Zerlegungsfolge $\mathcal{Z}_n$ gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{p \to \infty} R(f, \mathcal{Z}_p).$$

Hierbei haben wir allerdings die Existenz des Flächeninhalts bereits als gegeben angenommen. Es ist außerdem noch die Frage zu klären, inwieweit der Grenzwert von $R(f, \mathcal{Z}_p)$ von der speziellen Wahl der Zerlegungsfolge abhängt. Wir haben also zu zeigen: Für jede im Sinne von (2.7) integrierbare Funktion existiert der Grenzwert $\lim_{p \to \infty} R(f, \mathcal{Z}_p)$ und ist unabhängig von der Wahl der Zerlegungsfolge $\mathcal{Z}_p$. Erst wenn dies gezeigt ist, verfügen wir über eine exakte Definition des Riemann-Integrals.

Sind $\mathcal{Z} = (x_0, \ldots, x_n)$ und $\mathcal{Z}' = (x'_0, \ldots, x'_m)$ zwei Zerlegungen eines Intervalls $[a, b]$, so nennen wir $\mathcal{Z}'$ eine **Verfeinerung** von $\mathcal{Z}$, wenn gilt: Zu jedem $\nu \in \{0, 1, \cdots, n\}$ existiert ein $\mu \in \{0, \ldots, m\}$ mit $x_\nu = x'_\mu$.

Hilfssatz (2.8): Ist $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$, so gilt

$$S(f, \mathcal{Z}') \leq S(f, \mathcal{Z})$$

und
$$|R(f,\mathcal{Z}) - R(f,\mathcal{Z}')| \leq S(f,\mathcal{Z}).$$

Beweis: Gegeben sei eine Zerlegung $\mathcal{Z} = (x_0,\ldots,x_n;\xi_1,\cdots,\xi_n)$ und eine Verfeinerung $\mathcal{Z}' = (x'_0,\ldots,x'_m;\xi'_1,\ldots,\xi'_m)$. Jedes Teilintervall $[x'_{\mu-1},x'_\mu]$ ist in einem Intervall $[x_{\nu_\mu-1},x_{\nu_\mu}]$ enthalten, und daraus folgt

$$\sum_{\mu=1}^{m} s(f;x'_{\mu-1},x'_\mu)(x'_\mu - x'_{\mu-1}) \leq \sum_{\mu=1}^{m} s(f;x_{\nu_\mu-1},x_{\nu_\mu})(x'_\mu - x'_{\mu-1}) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} s(f;x_{\nu-1},x_\nu)\cdot(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

und daraus folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung beweist man wie folgt:

$$\left| f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) - \sum_{x_{\nu-1}<x'_\mu\leq x_\nu} f(\xi'_\mu)(x'_\mu - x'_{\mu-1}) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{x_{\nu-1}<x'_\mu\leq x_\nu} |f(\xi_\nu) - f(\xi'_\nu)|\cdot(x'_\mu - x'_{\mu-1}) \leq s(f;x_{\nu-1},x_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Die Summation über ν liefert nun die Behauptung. □

(2.9) Hilfssatz: Für zwei beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}_1,\ \mathcal{Z}_2$ von $[a,b]$ gilt

$$|R(f,\mathcal{Z}_1) - R(f,\mathcal{Z}_2)| \leq S(f,\mathcal{Z}_1) + S(f,\mathcal{Z}_2).$$

Beweis: Wir bilden zunächst die Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$, die aus allen Zerlegungspunkten von $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ besteht. Dann ist $\mathcal{Z}$ offenbar eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}_1$ und ebenso von $\mathcal{Z}_2$. Aus (2.8) folgt daher

$$|R(f,\mathcal{Z}_1) - R(f,\mathcal{Z})| \leq S(f,\mathcal{Z}_1)$$

und ebenso
$$|R(f,\mathcal{Z}_2) - R(f,\mathcal{Z})| \leq S(f,\mathcal{Z}_2).$$

Die Behauptung folgt daher direkt aus der Dreiecksungleichung.

(2.10) Hilfssatz: Sei f über $[a,b]$ integrierbar und seien $(\mathcal{Z}_p),\ (\mathcal{Z}'_p)$ Zerlegungsfolgen von $[a,b]$ mit $\lim_{p\to\infty} S(f,\mathcal{Z}_p) = \lim_{p\to\infty} S(f,\mathcal{Z}'_p) = 0$. Dann existieren die beiden Grenzwerte $\lim_{p\to\infty} R(f,\mathcal{Z}_p)$ und $\lim_{p\to\infty} R(f,\mathcal{Z}'_p)$ und sind gleich.

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ existiert zunächst ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $S(f,\mathcal{Z}_p) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und $S(f,\mathcal{Z}'_p) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $p \geq N$ ist. Für $p,q \geq N$ folgt daraus mit (2.9)

$$|R(f,\mathcal{Z}_p) - R(f,\mathcal{Z}_q)| \leq S(f,\mathcal{Z}_p) + S(f,\mathcal{Z}_q) \leq \varepsilon$$

und die analoge Aussage für $\mathcal{Z}'_p$, $\mathcal{Z}'_q$. Nach dem Cauchy-Kriterium existieren daher die entsprechenden Grenzwerte, und für alle $p \geq N$ gilt

$$|R(f, \mathcal{Z}_p) - R(f, \mathcal{Z}'_p)| \leq S(f, \mathcal{Z}_p) + S(f, \mathcal{Z}'_p) \leq \varepsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung. Wir haben nun damit insgesamt:

(2.11) Satz und Definition: *Die Funktion f sei über $[a, b]$ integrierbar. Dann gibt es Folgen $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \ldots$ von Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$ mit der Eigenschaft $\lim_{p\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_p) = 0$. Für jede solche Folge existiert der Grenzwert $\lim_{p\to\infty} R(f, \mathcal{Z}_p)$ und ist unabhängig von der speziellen Folge $(\mathcal{Z}_p)$. Dieser gemeinsame Grenzwert wird mit*

$$\int_a^b f(x)dx$$

bezeichnet und heißt das **bestimmte Integral** *(oder* **Riemann-Integral***) von f über $[a, b]$. Ist f reell und positiv, so heißt $\int_a^b f(x)dx$ auch der* **Flächeninhalt** *der Punktmenge $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.*

Hier die wichtigsten Rechenregeln für das bestimmte Integral:

(2.12) Seien f, g über $[a, b]$ integrierbar und $c, d \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Dann ist auch $cf + dg$ über $[a, b]$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b cf(x) + dg(x)dx = c\int_a^b f(x)dx + d\int_a^b g(x)dx.$$

Beweis: Sei $\mathcal{Z} = (x_0 \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Dann gilt

$$S(cf + dg, \mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n} s(cf + dg; x_{\nu-1}, x_\nu) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^{n} (|c|s(f; x_{\nu-1}, x_\nu) + |d|s(g; x_{\nu-1}, x_\nu))(x_\nu - x_{\nu-1}) = |c| \cdot S(f, \mathcal{Z}) + |d| \cdot S(g, \mathcal{Z}).$$

Nach Voraussetzung sind f und g integrierbar. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es daher Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ mit

$$S(f, \mathcal{Z}_1) \leq \frac{\varepsilon}{2|c| + 1}, \quad S(g, \mathcal{Z}_2) \leq \frac{\varepsilon}{2|d| + 1}.$$

Ist $\mathcal{Z}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$, so folgt:

$$S(cf + dg, \mathcal{Z}) \leq |c| \cdot \frac{\varepsilon}{2|c| + 1} + |d| \cdot \frac{\varepsilon}{2|d| + 1} \leq \varepsilon,$$

und daher ist $cf + dg$ integrierbar.

Sei nun $(\mathcal{Z}_m)$ eine Zerlegungsfolge mit $\lim_{m\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_m) = 0$. Indem man $\mathcal{Z}_m$ nötigenfalls verfeinert, kann man auch $\lim_{m\to\infty} S(g, \mathcal{Z}_m) = 0$ annehmen. Dann folgt

$$R(cf + dg, \mathcal{Z}_m) = c \cdot R(f, \mathcal{Z}_m) + d \cdot R(g, \mathcal{Z}_m)$$

und daraus direkt die Behauptung (2.12). □

(2.13) Sei $a < b < c$. Genau dann ist eine Funktion f über $[a, c]$ integrierbar, wenn f über $[a, b]$ und über $[b, c]$ integrierbar ist. Es gilt dann

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Beweis: (i) Sei f sowohl über $[a, b]$ wie über $[b, c]$ integrierbar. Dann gibt es Zerlegungsfolgen $(\mathcal{Z}_m^1)$ von $[a, b]$ mit $\lim_{m\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_m^1) = 0$ und $(\mathcal{Z}_m^2)$ von $[b, c]$ mit $\lim_{m\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_m^2) = 0$.

$\mathcal{Z}_m^1$ und $\mathcal{Z}_m^2$ ergeben zusammen eine Zerlegung $\mathcal{Z}_m$ von $[a, c]$ mit $S(f, \mathcal{Z}_m) = S(f, \mathcal{Z}_m^1) + S(f, \mathcal{Z}_m^2)$. Es ist dann $\lim_{m\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_m) = 0$. Daher ist f tatsächlich integrierbar über $[a, c]$.

(ii) Sei f über $[a, c]$ integrierbar. Dann gibt es eine Zerlegungsfolge $(\mathcal{Z}_m)$ von $[a, c]$ mit $\lim_{m\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_m) = 0$. Wir verfeinern nun, falls nötig, $\mathcal{Z}_m$ durch Hinzunahme des Teilpunktes b und erhalten dadurch Zerlegungen $\mathcal{Z}_m^1$ von $[a, b]$ sowie $\mathcal{Z}_m^2$ von $[b, c]$ mit

$$S(f, \mathcal{Z}_m) = S(f, \mathcal{Z}_m^1) + S(f, \mathcal{Z}_m^2) \quad \text{für alle } m.$$

Da Schwankungssummen stets positiv sind, folgt

$$\lim_{m\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_m) = \lim_{m\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_m^1) = \lim_{m\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_m^2) = 0.$$

Also ist f über $[a, b]$ wie auch über $[b, c]$ integrierbar. Als Grenzwert der Identität $R(f, \mathcal{Z}_m) = R(f, \mathcal{Z}_m^1) + R(f, \mathcal{Z}_m^2)$ folgt daher die Behauptung

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

(2.14) Sind f, g reellwertig und über $[a, b]$ integrierbar, und gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so folgt

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis: Mit g und f ist auch $g - f$ über $[a, b]$ integrierbar. Seien nun $\mathcal{Z}_m$ Zerlegungen von $[a, b]$ mit $\lim_{m\to\infty} S(g - f, \mathcal{Z}_m) = 0$. Dann gilt zunächst

$$R(g - f, \mathcal{Z}_m) \geq 0,$$

weil $g(x) - f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ ist. Weiter gilt

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0$$

und daher die Behauptung

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

(2.15) Ist die (reell- oder komplexwertige) Funktion f über $[a, b]$ integrierbar, so ist auch $|f|$ über $[a, b]$ integrierbar, und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Beweis: Sei $\mathcal{Z} = (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Dann gilt

$$s(|f|; x_{\nu-1}, x_\nu) = \sup_{x, x' \in [x_{\nu-1}, x_\nu]} ||f(x)| - |f(x')||(x_\nu - x_{\nu-1}) \leq$$

$$\leq \sup_{x, x' \in [x_{\nu-1}, x_\nu]} |f(x) - f(x')|(x_\nu - x_{\nu-1}) = s(f; x_{\nu-1}, x_\nu)$$

(wegen $||x| - |y|| \leq |x - y|$). Es folgt

$$S(|f|, \mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n} s(|f|; x_{\nu-1}, x_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{n} s(f; x_{\nu-1}, x_\nu) =$$

$$= S(f, z).$$

Mit f ist folglich auch $|f|$ integrierbar. Ist $(\mathcal{Z}_m)$ eine Zerlegungsfolge von $[a, b]$ mit $\lim_{m\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_m) = 0$, dann gilt für alle m:

$$|R(f, \mathcal{Z}_m)| \leq R(|f|, \mathcal{Z}_m).$$

Damit folgt

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \lim_{m\to\infty} R(f, \mathcal{Z}_m) \right| = \lim_{m\to\infty} |R(f, \mathcal{Z}_m)| \leq$$

$$\leq \lim_{m\to\infty} R(|f|, \mathcal{Z}_m) = \int_a^b |f(x)|dx.$$

$\square$

(2.16) Ist $f(x) \equiv k$ konstant auf $[a, b]$, so ist f integrierbar über $[a, b]$, und es gilt $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b k\ dx = k(b - a)$.

Beweis: Jede Zerlegung von $[a,b]$ hat offenbar die Schwankungssumme 0, und die Riemannsche Summe ist $k(b-a)$. $\square$

Man kann jetzt leicht die Eigenschaft (2.4) nachweisen. (2.2) ist bereits in (2.12) enthalten.

Mit einer Funktion f ist auch $f(x)-z$ für alle $z \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) integrierbar, und es ist

$$\int_a^b f(x) - z \; dx = \int_a^b f(x)dx - z(b-a).$$

Folglich ist dann auch $|f(x)-z|$ über $[a,b]$ integrierbar. Falls $|f(x)-z| \leq t$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, ist

$$\left| \int_a^b f(x) - z \; dx \right| \leq \int_a^b |f(x)-z| dx \leq \int_a^b t \; dx = t(b-a).$$

Wir haben damit das Problem der Flächenmessung im Prinzip gelöst. Zu zeigen ist allerdings noch, dass die wichtigsten Funktionen überhaupt integrierbar sind. Insbesondere werden wir nun zeigen, dass jede **stetige** Funktion integrierbar ist. Hierzu zunächst ein Hilfssatz:

Hilfssatz (2.17): Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) eine Funktion mit folgender Eigenschaft: Für alle $c \in [a,b)$ existiere $\lim_{x \to c+} f(x)$, und für jedes $d \in (a,b]$ existiere $\lim_{x \to d-} f(x)$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

so dass die Schwankung von f in jedem der offenen Intervalle $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ höchstens ε beträgt.

Wir führen den Beweis indirekt.
Man halbiere zunächst $[a,b]$. Falls für jede der beiden Hälften die geforderte Eigenschaft gilt, so gilt sie offenbar auch für $[a,b]$. Also gilt umgekehrt: Existiert für $[a,b] =: [a_0,b_0]$ keine Zerlegung der geforderten Form, so existiert sie auch nicht für mindestens eine der beiden Hälften. Eine Hälfte, für die die Zerlegung nicht existiert, wollen wir $[a_1,b_1]$ nennen.

Auf diese Weise erhalten wir eine Intervallschachtelung

$$[a_0,b_0] \supseteq [a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \cdots.$$

Nun gibt es genau einen Punkt, der allen Intervallen angehört: $c \in [a_n,b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zwei Fälle sind jetzt zu unterscheiden:

1. Fall: c sei nicht Endpunkt irgendeines der Intervalle $[a_n,b_n]$ und insbesondere nicht von $[a_0,b_0]$.
Nach Voraussetzung existieren die beiden einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \to c+} f(x) = u, \quad \lim_{x \to c-} f(x) = v.$$

Daher gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - u| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } c < x \leq c + \delta,$$

$$|f(x) - v| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } c - \delta \leq x < c.$$

Die Schwankung von f in $(c-\delta, c)$ und $(c, c+\delta)$ beträgt daher jeweils höchstens ε. Ist n so groß, dass $|b_n - a_n| < \delta$ gilt, so folgt

$$[a_n, b_n] \subseteq (c - \delta, c + \delta),$$

und daher ergibt $a_n < c < b_n$ eine Zerlegung von $[a_n, b_n]$, die der Konstruktion von $[a_n, b_n]$ widerspricht.

2. Fall: Nun sei c ein Endpunkt eines der Intervalle $[a_m, b_m]$. Dann ist c auch Endpunkt aller $[a_n, b_n]$ mit $n \geq m$, weil c für alle n zu $[a_n, b_n]$ gehört. Wir können daher nun wie im 1. Fall einen der beiden Grenzwerte verwenden, um (ohne Unterteilung des Intervalls) zu einem Widerspruch zu gelangen. Dies beendet den Beweis von (2.17). □

Satz (2.18): *Jede Funktion, die den Voraussetzungen von (2.17) genügt - insbesondere also jede auf $[a, b]$ stetige Funktion -, ist über $[a, b]$ integrierbar.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen dann eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$, so dass wie in (2.17) folgt: In jedem der offenen Teilintervalle $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ hat f eine Schwankung, die höchstens gleich $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ ist. Würde nun diese Abschätzung für die abgeschlossenen Intervalle $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ gelten, so ergäbe sich

$$S(f, \mathcal{Z}) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

und daraus sofort die Behauptung. Da wir aber unsere Abschätzung zunächst nur für die offenen Teilintervalle $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ haben, müssen wir etwas vorsichtiger vorgehen.

Wir ersetzen jedes x_ν durch zwei in der Nähe gelegene Teilpunkte $x'_{2\nu},\ x'_{2\nu+1}$ und ersetzen auf diese Weise die Zerlegung $\mathcal{Z}$ durch eine neue Zerlegung $\mathcal{Z}'$: $\mathcal{Z}'$ besteht aus den Teilpunkten

$$a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_{2n} < x'_{2n+1} = b$$

mit $x'_{2\nu} < x_\nu < x'_{2\nu+1}$. Dann gilt

$$[x'_{2\nu-1}, x'_{2\nu}] \subseteq (x_{\nu-1}, x_\nu)$$

und daher

$$s(f; x'_{2\nu-1}, x'_{2\nu}) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

In $[x'_{2\nu}, x'_{2\nu+1}]$ kann die Schwankung jedoch größer sein. Sie lässt sich im allgemeinen nur durch $2M$ abschätzen, wenn M eine Schranke von $|f(x)|$ in $[a, b]$ ist. Es folgt:

$$S(f, \mathcal{Z}') = \sum_{\nu=1}^{2n+1} s(f; x'_{\nu-1}, x'_\nu)(x'_\nu - x'_{\nu-1}) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} s(f; x'_{2\nu-1}, x'_{2\nu})(x'_{2\nu} - x'_{2\nu-1}) + \sum_{\nu=0}^{n} s(f; x'_{2\nu}, x'_{2\nu+1})(x'_{2\nu+1} - x'_{2\nu}) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{\nu=1}^{n} (x'_{2\nu} - x'_{2\nu-1}) + 2M \cdot \sum_{\nu=0}^{n} (x'_{2\nu+1} - x'_{2\nu}),$$

wobei $\sum_{\nu=1}^{n}(x'_{2\nu} - x'_{2\nu-1}) \leq b - a$ gilt.

Wir wählen nun $x'_{2\nu}$, $x'_{2\nu+1}$ so nahe bei x_ν dass

$$\sum_{\nu=0}^{n} (x'_{2\nu-1} - x'_{2\nu}) \leq \frac{\varepsilon}{4M}$$

wird. Dann folgt

$$S(f, \mathcal{Z}') \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und daraus die Behauptung (2.18). □

Satz (2.19): *Ist f über $[a, b]$ integrierbar, so ändert sich der Wert des Integrals $\int_a^b f(x)dx$ nicht, wenn man den Wert von f an endlich vielen Stellen des Intervalls $[a, b]$ abändert.*

Beweis: Die Zwischenpunkte ξ_ν in den Riemannschen Summen kann man beliebig wählen, dabei lassen sich endlich viele Stellen vermeiden. □

Wie geht man nun im konkreten Fall vor, um ein bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)dx$ zu berechnen? Bevor wir diese Frage in (2.24) beantworten, beweisen wir vorbereitend:

Lemma (2.20): Die Funktion f sei über $[a, b]$ integrierbar, und es gelte

$$\lim_{x \to a+} f(x) = u \quad \text{und} \quad \lim_{x \to b-} f(x) = v.$$

Dann ist

$$\lim_{y \to a+} \frac{1}{y-a} \int_a^y f(x)dx = u$$

bzw.

$$\lim_{y \to b-} \frac{1}{b-y} \int_y^b f(x)dx = v.$$

Beweis: Zunächst existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - u| \leq \varepsilon$ für alle x mit $a < x \leq a + \delta$. Wir können nun, indem wir nötigenfalls f an der Stelle a abändern (was nach (2.19) das Integral nicht verändert), $f(a) = u$ annehmen.

Dann gilt $|f(x) - u| \leq \varepsilon$ für alle x aus dem abgeschlossenen Intervall $[a, a+\delta]$. Es ist nun

$$\left|\frac{1}{y-a}\int_a^y f(x)dx - u\right| = \left|\frac{1}{y-a}\int_a^y (f(x)-u)dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{y-a}\int_a^y |f(x)-u|\ dx \leq \frac{1}{y-a}\int_a^y \varepsilon\ dx = \varepsilon.$$

Der Beweis der zweiten Behauptung erfolgt analog. Damit ist (2.20) bewiesen. □

Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, setzt man nun noch

(2.21) $\int_a^a f(x)\ dx := 0$

sowie

(2.22) $\int_a^b f(x)\ dx := -\int_b^a f(x)dx$

für $b < a$. Mit diesen beiden Definitionen ist sichergestellt, dass

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

für beliebige reelle Zahlen a, b, c gilt, unabhängig von deren Anordnung.

Es gilt nun folgende Aussage:
(2.23) Ist f eine über $[a, b]$ integrierbare Funktion und $c \in [a, b]$, so ist

$$F(y) := \int_c^y f(x)dx$$

für $y \in [a, b]$ eine stetige Funktion.

Beweis: Sei M eine Schranke der Funktion $|f|$ auf $[a, b]$. Dann gilt

$$|F(z) - F(y)| = \left|\int_y^z f(x)\ dx\right| \leq M \cdot |z-y|,$$

und daraus folgt die Behauptung. □

Bisher hatten wir in Anlehnung an die anschauliche Vorstellung von einem Flächeninhalt das Integral einer integrierbaren Funktion als Grenzwert von approximierenden Riemannschen Summen definiert. Jetzt wird gezeigt, dass die Integration die Umkehrung der Differentiation ist, was in vielen Fällen die Möglichkeit zur expliziten Berechnung des Integrals liefert:

(2.24) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) stetig und $c \in I$. Dann ist

$$F(y) := \int_c^y f(x)dx$$

eine Stammfunktion von f in I. D.h. F ist differenzierbar, und es ist $F'(y) = f(y)$ für $y \in I$. Ist G irgendeine Stammfunktion von f und sind $a, b \in I$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Beweis: Zunächst folgt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ aus dem Lemma (2.20) in Verbindung mit den Konventionen (2.21) und (2.22). Ist nun G eine weitere Stammfunktion von f, so folgt mit dem Mittelwertsatz

$$G(y) = F(y) + C$$

mit einer Konstanten C für alle $y \in I$. Also ist tatsächlich

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

□

Bemerkung: Satz (2.24) bedeutet Folgendes:
(i) Jede stetige Funktion f besitzt eine Stammfunktion, nämlich $y \mapsto \int_a^y f(x)dx$. Man hat stets die Möglichkeit, diese Stammfunktion als Grenzwert einer Folge von Riemannschen Summen beliebig genau zu berechnen.
(ii) Kennt man eine Stammfunktion F einer gegebenen Funktion f, so kann jedes bestimmte Integral der Form $\int_a^b f(x)dx$ exakt berechnet werden, und zwar als $F(b) - F(a)$.

Bemerkung: Die Differenz $F(b) - F(a)$ schreibt man auch kurz als

$$F(x)|_a^b \quad \text{oder } [F(x)]_a^b.$$

Man kann nun auf Grund von Satz (2.24) aus jeder Differentiationsregel eine Regel zur bestimmten Integration erhalten - ebenso, wie wir es im vorigen Abschnitt für die unbestimmte Integration getan haben:

(2.25) Partielle Integration: *Seien f, g stetig differenzierbar auf $[a, b]$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx.$$

(2.26) Substitutionsregel: *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g([a, b]) \subseteq I$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy.$$

4.3 Uneigentliche Integrale, Gammafunktion

Für viele Anwendungen ist der bisher behandelte Integralbegriff zu eng. Man ist oft an einer Integration über ein unendliches Intervall oder der Integration unbeschränkter Funktionen interessiert (das sogenannte „uneigentliche“ Integral). Wir werden in diesem Paragraphen den Begriff des Riemann-Integrals dementsprechend erweitern und als Anwendung die Gammafunktion einführen. Die Gammafunktion ist eine Funktion, die die nur für natürliche Zahlen definierten Fakultäten interpoliert und die durch ein uneigentliches Integral definiert ist.

Zur Vereinfachung der Notation erweitern wir zunächst den Intervallbegriff in der Weise, dass für die Grenzen a und b auch die Symbole ∞ und $-\infty$ eingesetzt werden können. Das offene Intervall $(-\infty, b)$ ist zu verstehen als $\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, und entsprechend sei $(-\infty, b]$ die Halbgerade $\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$. In gleicher Weise setzen wir $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ und $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.

Hier zunächst zwei Beispiele, die deutlich machen, wie man bei der Einführung uneigentlicher Integrale vorgeht:

Es ist

$$(3.1) \qquad \int_0^t e^{-x}\,dx = 1 - e^{-t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Für $t \to \infty$ konvergiert das Integral gegen 1. Dieser Grenzwert 1 ist anschaulich die Fläche unter der Kurve $t \mapsto e^{-t}$, die nach rechts unbeschränkt und auf der linken Seite von der y-Achse begrenzt ist.

Ein weiteres Beispiel:

$$(3.2) \qquad \int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(1 - \sqrt{u}).$$

Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ wächst für $x \to 0$ unbegrenzt. Trotzdem ergibt unser Integral auch für $u = 0$ einen Sinn, wenn man es als den Grenzwert für $u \to 0$ definiert, und ergibt dann den Wert 2.

Es geht in diesem Abschnitt um drei kritische Fälle:

1. Eine Integrationsgrenze ist unendlich, d.h. für Intervalle (a, b) wird auch die Grenze $a = -\infty$ oder $b = \infty$ zugelassen. Der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \to a+}$ ist dann als $\lim_{x \to -\infty}$ zu verstehen, entsprechend im anderen Fall der Grenzwert $\lim_{x \to b-}$ als $\lim_{x \to \infty}$.

2. Der Integrand ist an einer Integrationsgrenze nicht definiert (wie wir es im Beispiel (3.2) gesehen haben).

3. Beide Integrationsgrenzen sind kritisch, d.h. für beide Grenzen gilt je eine Eigenschaft 1 oder 2.

Für die beiden ersten dieser Fälle sind die uneigentlichen Integrale wie folgt definiert:

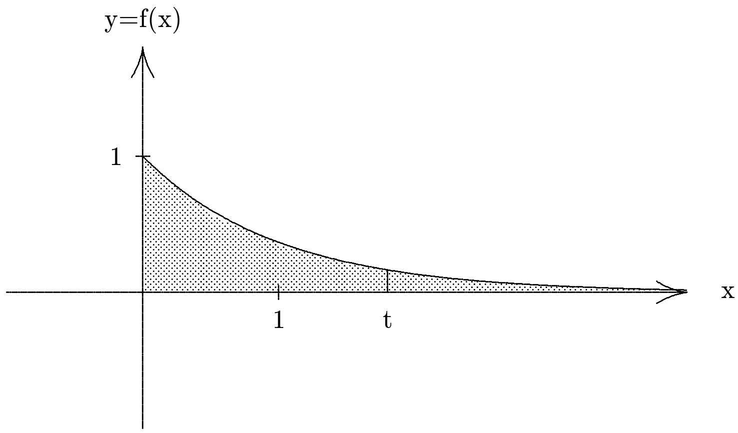

Abbildung 4.4: Das Integral $\int_0^t f(x)dx$ mit $f(x) = e^{-x}$ ist die Fläche des durch $0 \leq x \leq t$ gegebenen Teilstücks; verzichtet man auf die Beschränkung nach rechts, so hat man das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)dx = 1$.

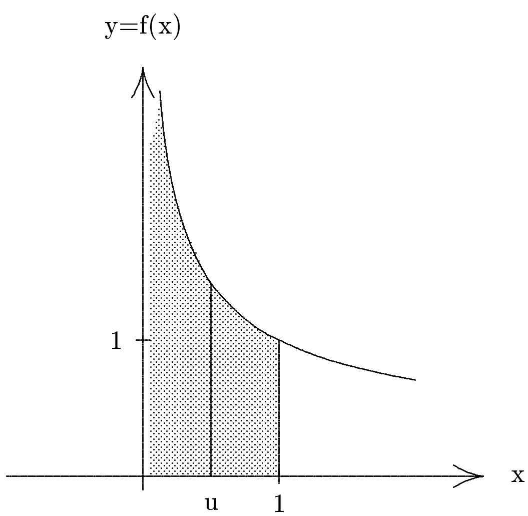

Abbildung 4.5: In diesem Beispiel mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist $\int_u^1 f(x)dx$ das eigentliche, $\int_0^1 f(x)dx$ das uneigentliche Integral.

Definition (3.3): *Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ eine Funktion (die Fälle $a=-\infty$ und $b=\infty$ sind zugelassen). Für jedes $c\in(a,b)$ sei f über $[a,c]$ bzw. $[c,b]$ integrierbar. Wenn der Grenzwert*

$$\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)dx \quad \text{bzw.} \quad \lim_{c\to a+}\int_c^b f(x)\ dx$$

existiert, so heißt f über (a,b) **uneigentlich integrierbar**. *Der Grenzwert heißt* **uneigentliches Integral** *und wird mit*

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

bezeichnet. Man sagt auch: Das bei b (bzw. bei a) **uneigentliche Integral** $\int_a^b f(x)\ dx$ **konvergiert**.

Beispiele für uneigentliche Integrale haben wir bereits in (3.1) und (3.2) gesehen. Hier ein weiteres Beispiel: Für $0<s<1$ ist

(3.4) $\quad \int_0^1 x^{-s}\ dx = \lim_{c\to 0+}\int_c^1 x^{-s}\ dx = \lim_{c\to 0+}\left[\frac{1}{-s+1}x^{-s+1}\right]_c^1 = \frac{1}{1-s}.$

Sei $s>1$. Dann ist

(3.5) $\quad \int_1^\infty x^{-s}\ dx = \lim_{c\to\infty}\int_1^c x^{-s}\ dx = \lim_{c\to\infty}\left(\frac{1}{1-s}(c^{1-s}-1)\right) = \frac{1}{s-1}.$

Bemerkung: Es gibt noch weitere Typen von uneigentlichen Integralen. Diese aber können durch Zerlegung in zwei geeignete Summanden auf (3.3) zurückgeführt werden.

Beispiel: Man definiert etwa

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} := \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$$

oder

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx = \int_{-\infty}^c f(x)\ dx + \int_c^\infty f(x)\ dx$$

mit $c\in\mathbb{R}$ beliebig. Aus (2.21) und (2.22) kann man schließen, dass der Wert dieses Integrals (falls er existiert) nicht von der Wahl des Zerlegungspunkts c abhängt.

Wir benötigen nun ein Konvergenzkriterium für uneigentliche Integrale:

(3.6) Satz (Cauchy-Kriterium für Funktionen):
Sei $b\in\mathbb{R}$ oder $b=\infty$. Der Definitionsbereich D von f enthalte für jedes $c<b$ Punkte aus (c,b). Der Grenzwert

$$\lim_{x\to b-} F(x)$$

existiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c < b$ gibt, so dass $|F(y) - F(z)| \leq \varepsilon$ ist für alle $y, z \in D \cap (c, b)$. Das analoge Kriterium gilt für $\lim_{x\to a+}$ anstelle von $\lim_{x\to b-}$.

Beweis: Für die eine Richtung sei $\lim_{x\to b-} F(x) =: A$. Dann gilt für $y, z \in D \cap (c, b)$, wenn c passend gewählt ist:

$$|F(y) - F(z)| \leq |F(y) - A| + |A - F(z)| \leq \varepsilon,$$

und wir sind fertig. Für die andere Richtung nehmen wir an, für $y, z \in D \cap (c, b)$ gelte $|F(z) - F(y)| \leq \varepsilon$. Sei nun (x_n) eine Folge aus D, die gegen b konvergiert. Für genügend große n, etwa $n \geq n_0$, gilt dann $x_n \in (c, b)$. Es ist nun $(F(x_n))$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent. Ihren Grenzwert $\lim_{n\to\infty} F(x_n)$ bezeichnen wir mit A.

Für alle $n \geq n_0$ und $z \in D \cap (c, d)$ gilt dann $|F(z) - F(x_n)| \leq \varepsilon$. Durch Grenzübergang $n \to \infty$ folgt daraus $|F(z) - A| \leq \varepsilon$ und weiter $\lim_{z\to b-} F(z) = A$. Dies beendet den Beweis von (3.6). □

(3.7) Konvergenzkriterium für uneigentliche Integrale:
Das bei b uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Werte $c < b$ gibt, so dass für $y, z \in (c, b)$ stets

$$\left|\int_y^z f(x)dx\right| \leq \varepsilon$$

gilt.

Beweis: Das Integral $\int_a^x f(t)dt$ (im folgenden mit $F(x)$ bezeichnet) konvergiert wegen (3.6) genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein c gibt mit

$$|F(z) - F(y)| = \left|\int_y^z f(t)dt\right| \leq \varepsilon \quad \text{für } y, z \in (a, b).$$

Daraus folgt die Behauptung. Analoges gilt wieder für die Integrale, die an der unteren Grenze uneigentlich sind. □

(3.8) Majorantenkriterium:
Das bei b (bzw. a) uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert, wenn es eine Funktion $g(x)$ gibt mit $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in (a, b)$, für welche das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x)dx$ konvergiert.

Beweis: Wir wenden das Konvergenzkriterium (3.7) an. Nach diesem gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Werte $c < b$ mit

$$\int_y^z g(x)dx \leq \varepsilon \quad \text{für } c < y < z < b.$$

Daraus folgt

$$\left|\int_y^z f(x)dx\right| \leq \int_y^z |f(x)|dx \leq \int_y^z g(x)dx \leq \varepsilon,$$

und daraus folgt mit (3.5) die Behauptung. $\square$

Bemerkung: Eine Funktion g mit der Eigenschaft (3.8) heißt **Majorante** von f. (Geeignete Majoranten sind beispielsweise $\frac{c}{x^a}$ oder allgemeiner $\frac{c}{(x-a)^b}$.)

Wir führen nun als Beispiel eines uneigentlichen Integrals die **Gammafunktion** (Γ-Funktion) ein:

Für $x > 0$ sei

(3.9) $\quad \Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$

Wir zeigen zunächst, dass diese Funktion $\Gamma(x)$ wohldefiniert ist. Im ersten Schritt zerlegen wir den Ausdruck für $\Gamma(x)$ wie folgt:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\ dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\ dt.$$

Sei zuerst $0 < x < 1$.
Das Integral von 0 bis 1 ist konvergent, weil wir mit $t \mapsto t^{x-1}$ eine Majorante des Integranden haben und $\int_0^1 t^{x-1}dt$ nach Beispiel (3.4) konvergiert. Das Integral von 1 bis ∞ ist konvergent, weil $t \mapsto e^{-t}$ eine Majorante des Integranden ist und $\int_1^\infty e^{-t}dt$ nach Beispiel (3.1) konvergiert.

Sei nun $x \geq 1$. In der obigen Zerlegung existiert dann $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ als Integral über eine stetige Funktion. Für das Integral von 1 bis ∞ bemerken wir Folgendes: Ist $P(x)$ ein reellwertiges Polynom und ist $b > 0$, so ist das uneigentliche Integral $\int_a^\infty P(x)e^{-bx}dx$ konvergent.

Da nämlich $x \mapsto e^{bx}$ schneller wächst als jede Potenz von x, gilt $x^2 \cdot P(x) \cdot e^{-bx} \to 0$ für $x \to \infty$. Für eine passende Konstante $c > 0$ gilt daher $|P(x) \cdot e^{-bx}| \leq \frac{c}{x^2}$. Also existiert das uneigentliche Integral $\int_a^\infty P(x)e^{-bx}\ dx$. Insbesondere konvergiert daher $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\ dt$. Damit ist die Wohldefiniertheit der Gammafunktion für alle $x > 0$ gezeigt.

Lemma (3.10): Für alle $x > 0$ gilt

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x).$$

Beweis: Es ist $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\ dt = \lim_{v\to\infty} \lim_{u\to 0+} \int_u^v t^x e^{-t}\ dt = \lim_{v\to\infty} \lim_{u\to 0+} \left[-t^x e^{-t}|_u^v + \int_u^v xt^{x-1}e^{-t}\right]\ dt = x \cdot \Gamma(x)$. Damit ist Lemma (3.10) bewiesen.

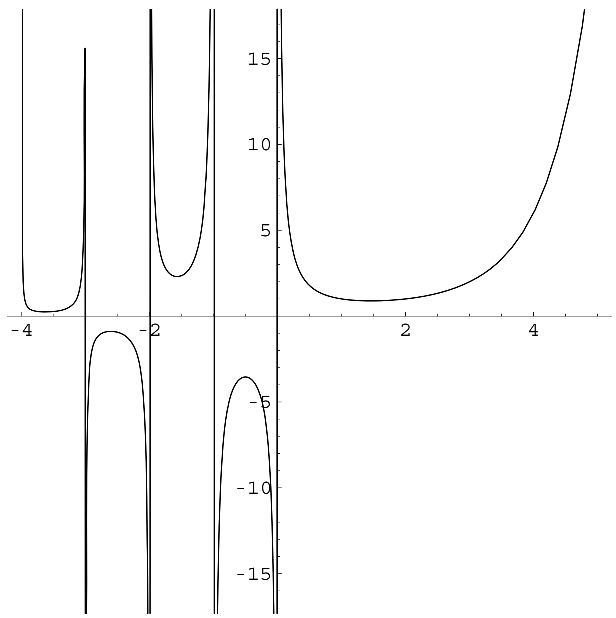

Abbildung 4.6: Gammafunktion

Für $x = 1$ gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 \cdot e^{-t}\; dt = 1$$

wegen (3.1).
Die Funktionalgleichung (3.10) ergibt nun $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$ und weiter $\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(1) = 2$. Mit Induktion zeigt man

(3.11) $\quad \Gamma(n+1) = n!$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Man verwendet (3.10) in der Form $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ dazu, die ursprünglich nur für $x > 0$ definierte Gammafunktion auf das Intervall $(-1, 0)$ fortzusetzen. Dies ergibt dann induktiv eine Fortsetzung von Γ auf ganz $\mathbb{R}$ mit Ausnahme der Werte $0, -1, -2 \ldots$

Wir kehren nun zur allgemeinen Betrachtung uneigentlicher Integrale zurück und beweisen einen Satz, der die Konvergenz eines uneigentlichen Integrals auf die Konvergenz einer Reihe zurückführt (und umgekehrt).

Satz (3.12) (Integralvergleichskriterium): *Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ positiv und monoton fallend, $a \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:*

$$\int_a^\infty f(x)\; dx \text{ konvergiert} \Longleftrightarrow \sum_{n=a}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert.}$$

Beweis: Sei $n \leq x \leq n+1$. Dann ist $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$ und daher

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq f(n+1).$$

Es folgt

$$\sum_{n=u}^{v} f(n) \geq \int_u^v f(x)dx \geq \sum_{n=u}^{v-1} f(n+1) = \sum_{n=u+1}^{v} f(n)$$

für $u < v,\ u,v \in \mathbb{N}$. Konvergiert das Integral aus Satz (3.12), so folgt für alle $y > 0$

$$0 \leq \sum_{n=u+1}^{v} f(n) \leq \int_u^v f(x)dx \leq$$

$$\leq \int_u^v f(x)dx + \int_v^{v+y} f(x)dx \leq \lim_{y\to\infty} \int_u^{v+y} f(x)dx = \int_u^\infty f(x)dx < \infty,$$

so dass die Reihe $\sum_n f(n)$ monoton wachsend und beschränkt und daher konvergent ist.

Für die andere Richtung nehmen wir die Konvergenz von $\sum_{n=a}^\infty f(n)$ an. Nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{n=u}^{v} f(n) \leq \varepsilon \quad \text{für alle } v > u > n_0.$$

Sind dann $y, z \in \mathbb{R}$ mit $n_0 \leq y < z$, so folgt (wenn v die kleinste natürliche Zahl $\geq z$ ist)

$$0 \leq \int_y^z f(x)dx \leq \int_{n_0}^v f(x)dx \leq \sum_{n=n_0}^{v-1} f(n) \leq \varepsilon,$$

und daraus folgt nach (3.7) die Konvergenz des Integrals. Damit ist (3.12) bewiesen. □

Beispiel (3.13): Das Integral $\int_1^\infty x^{-s}\, dx$ konvergiert für $s > 1$. Also konvergiert für $s > 1$ auch

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

(die **Riemannsche Zetafunktion**).

Kapitel 5

Approximation von Funktionen

5.1 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Gegeben sei eine Folge (f_n) reell- oder komplexwertiger Funktionen, die alle denselben Definitionsbereich D haben. Dann kann man leicht definieren, was unter der **punktweisen Konvergenz** dieser Folge zu verstehen ist: Man verlangt, dass an jeder Stelle $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Wert $f(x)$ konvergiert.

Der Begriff der punktweisen Konvergenz reicht aber meist nicht aus, wenn man aus Eigenschaften der Funktionenfolge (f_n) Eigenschaften der Grenzfunktion f ableiten will. Man kann dies im allgemeinen nur, wenn man den wichtigen Begriff der **gleichmäßigen Konvergenz** zur Verfügung hat. Als Vorbereitung hierzu führen wir zunächst einen Abstandsbegriff zwischen zwei Funktionen ein:

(1.1) Definition: *Gegeben seien zwei Funktionen f, g mit demselben Definitionsbereich D. Wir sagen, die Funktion g* **approximiert** f **mit einem Fehler** $\leq \varepsilon$, *wenn gilt*

$$|g(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \textit{für alle } x \in D,$$

bzw. anders geschrieben

$$\sup_{x\in D} |g(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Ist $h : D \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) beschränkt, so heißt

$$||h||_D := \sup_{x\in D} |h(x)|$$

die **Norm** *(oder* **Supremumsnorm***) von h auf D. Genau dann approximiert g eine Funktion f mit einem Fehler $\leq \varepsilon$, wenn $||g - f||_D \leq \varepsilon$ gilt.*

Es gelten folgende Ungleichungen bzw. Gleichungen:

$$(1.2)\qquad \begin{cases} ||f+g||_D \le ||f||_D + ||g||_D, \\ ||f\cdot g||_D \le ||f||_D \cdot ||g||_D, \\ ||cf||_D = |c|\cdot ||f||_D \text{ für } c \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Wir führen den **Beweis** hier nur für die erste Ungleichung:
Auf Grund der Dreiecksungleichung ist $|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$ für alle $x \in D$. Daraus folgt sofort $|f(x)+g(x)| \le \sup_{x\in D}|f(x)| + \sup_{x\in D}|g(x)|$ für alle $x \in D$. Auf der linken Seite dieser Ungleichung kann man $|f(x)+g(x)|$ durch $\sup_{x\in D}|f(x)+g(x)|$ ersetzen und hat damit die Behauptung.

(1.3) Definition: *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, und für $n \in \mathbb{N}$ sei jeweis f_n eine Abbildung $D \to \mathbb{C}$. Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert auf D* **gleichmäßig** *gegen eine Funktion f, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_D = 0$$

gilt, d.h. wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N gibt, so dass $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ für alle $n \ge N$ und alle $x \in D$ gilt. Man verwendet für die gleichmäßige Konvergenz auf D auch die Schreibweise

$$f_n \underset{D}{\rightrightarrows} f\,.$$

Bemerkung: Konvergiert eine Funktionenfolge gleichmäßig, so auch punktweise. Die Umkehrung gilt allerdings nicht: Gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in D$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und $x \in D$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ für $n \ge N$, das von ε <u>und von x</u> abhängen kann. In der Definition (1.3) ist die zusätzliche Voraussetzung enthalten, dass N nicht von x abhängt.

(1.4) Beispiel: $D = [0,1]$, $\quad f_n = x^n$.
Dann ist

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Also liegt in diesem Fall punktweise Konvergenz vor, allerdings keine gleichmäßige Konvergenz, da

$$||f_n - f||_D = \sup_{x\in D} |x^n - 0| = 1$$

für alle n gilt. Die Konvergenz ist jedoch in jedem Intervall $D_q := [0,q] \subseteq [0,1]$ mit $q < 1$ gleichmäßig, denn es gilt

$$||f_n - f||_{D_q} = \sup_{x\in D_q} |x^n - 0| = q^n$$

und $q^n \to 0$ für $n \to \infty$.

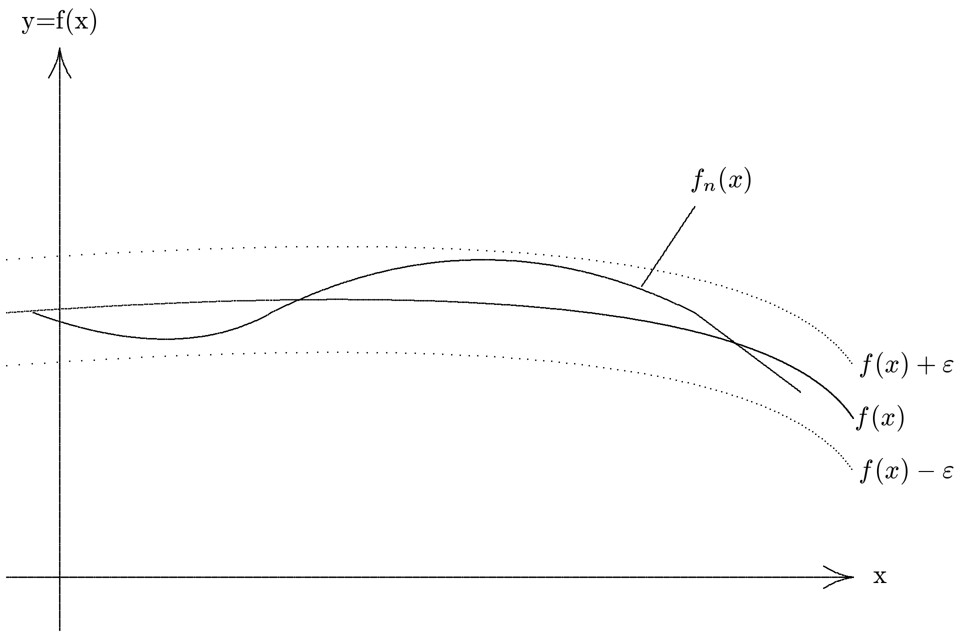

Abbildung 5.1: Gleichmäßige Konvergenz besagt, dass die Kurve $y = f_n(x)$ für $n \geq N$ ganz in dem Streifen $f(x) - \varepsilon \leq y \leq f(x) + \varepsilon$ der Breite 2ε um die Kurve $y = f(x)$ verläuft.

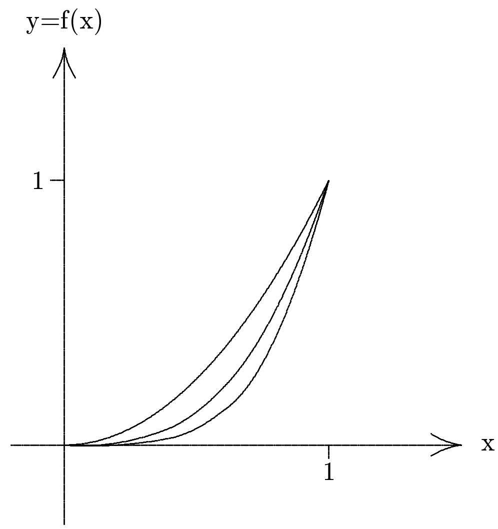

Abbildung 5.2: Für $f_n(x) = x^n$ auf $D = [0,1]$ (hier $n = 2,3,4$) gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, nicht aber die gleichmäßige Konvergenz.

Wir haben auf D_q folgende Grenzfunktion der Folge (f_n):

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{für } x \in D_q.$$

Auf ganz $D = [0,1]$ haben wir folgende Grenzfunktion (hier allerdings nur bezüglich punktweiser, nicht gleichmäßiger Konvergenz):

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Die Grenzfunktion ist in diesem Fall unstetig. Wir haben

$$0 = \lim_{x\to 1-} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1-} f_n(x) = 1.$$

Die beiden Limesbildungen sind hier also nicht miteinander vertauschbar. Bei gleichmäßiger Konvergenz jedoch können bestimmte Grenzprozesse vertauscht werden, wie wir in (1.5) sehen werden.

(1.5) Satz: *Die Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ sei auf dem gemeinsamen Definitionsbereich D definiert und konvergiere gleichmäßig gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$. Existiert $\lim_{x\to a} f_n(x) = c_n$ für $n \in \mathbb{N}$, dann existieren auch $\lim_{n\to\infty} c_n$ und $\lim_{x\to a} f(x)$, und beide Grenzwerte sind gleich:*

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Korollar (1.6): Die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig.

Beweis von (1.5): Zunächst existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } n \geq N_\varepsilon,\ x \in D.$$

Es ist $\lim_{x\to a} f_n(x) = c_n$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert also ein δ_n mit $|f_n(x) - c_n| \leq \frac{\varepsilon}{6}$ für $|x - a| \leq \delta_n$.

Für alle $n, m \geq N_\varepsilon,\ \delta = \min(\delta_n, \delta_m)$ gilt dann für $x \in D$ mit $|x - a| \leq \delta$:

$$|c_m - c_n| = |c_m - f_m(x) + f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x) + f_n(x) - c_n| \leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon.$$

Nach dem Cauchy-Kriterium existiert also der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} c_n = c$.

Nun wählen wir $n \geq N_\varepsilon$ so groß, dass $|c_n - c| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ gilt. Für alle $x \in D$ mit $|x - a| \leq \delta_n$ gilt dann

$$|f(x) - c| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - c_n| + |c_n - c| \leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Dies beendet den Beweis von Satz (1.5). □

Wichtig ist auch der folgende

Satz (1.7): *Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge über $[a, b]$ integrierbarer Funktionen, die gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f über $[a, b]$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^x f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)dt,$$

wobei die rechte Seite gleichmäßig für alle $x \in [a, b]$ konvergiert.

Beweis: Ist $I = [a, b]$ und $[u, v] \subseteq I$ ein Teilintervall, so gilt

$$s(f; u, v) \leq s(f_n; u, v) + 2 \cdot ||f - f_n||_I \quad \text{für alle } n.$$

Weiter ist $\sup_{x,x'\in[u,v]} |f(x) - f(x')| = \sup_{x,x'} |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x') + f_n(x') - f(x')| \leq 2 \sup |f(x) - f_n(x)| + \sup_{x,x'\in[u,v]} |f_n(x) - f_n(x')|$. Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von I gilt daher

$$S(f, \mathcal{Z}) \leq S(f_n, \mathcal{Z}) + 2(b - a) \cdot ||f - f_n||_I$$

für alle n. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein N_ε mit

$$||f - f_n||_I \leq \frac{\varepsilon}{4(b - a)} \quad \text{für } n \geq N_\varepsilon.$$

Wir wählen daher nun zu jedem n eine Zerlegung $\mathcal{Z}$, so dass gilt

$$S(f_n, \mathcal{Z}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann folgt $S(f, \mathcal{Z}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2(b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{4(b-a)} = \varepsilon$. Also ist die Grenzfunktion f in jedem Fall integrierbar. Der Rest folgt aus der Ungleichung

$$\left| \int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|dt \leq$$

$$\leq |x-a| \cdot ||f_n - f||_I \leq (b-a)||f_n - f||_I \quad \text{für } x \in I.$$

Die Folge der bestimmten Integrale $\int_a^x f_n(t)dt$ konvergiert also in der Tat gleichmäßig gegen $\int_a^x f(t)dt$, und damit ist Satz (1.7) bewiesen. □

Bemerkung: Ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, so braucht die Aussage von Satz (1.7) nicht richtig zu sein.
Beispiel (1.8): Sei

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Offenbar gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Andererseits ist

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 nx^{n-1}dx = 1,$$

in diesem Fall ist also der Grenzübergang von f_n zu $f \equiv 0$ nicht mit der Integration vertauschbar.

Wie verhält es sich bei der Differentiation? Wir interessieren uns für die Frage, in welchen Fällen

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)dx$$

gilt. An dem folgenden Beispiel sieht man zunächst, dass die gleichmäßige Konvergenz von $f_n(x)$ hierfür noch nicht ausreicht.

Beispiel (1.9): Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx)$. Dann gilt $||f_n|| = \frac{1}{n}$, und daher ist die Folge der f_n gleichmäßig gegen 0 konvergent. Andererseits ist $f_n'(x) = \cos(nx)$ keine gegen 0 konvergente Folge.

Es gilt aber der

Satz (1.10): *Sei $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig differenzierbar. Die Folge der Ableitungen f_n' konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion g, und die Folge $(f_n(x))$ konvergiere wenigstens an einer Stelle $x = c$ aus (a,b). Dann konvergiert f_n gleichmäßig auf (a,b) gegen eine Funktion f. Diese Funktion f ist differenzierbar mit $f' = g$.*

Beweis: Zunächst konvergiert $f_n(x) - f_n(c) = \int_c^x f_n'(t)dt$ nach (1.7) gleichmäßig gegen $\int_c^x g(t)dt$. Dann konvergiert $f_n(x)$ gleichmäßig gegen $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(c) + \int_c^x g(t)dt$. Die Grenzfunktion g ist nach (1.6) stetig, und die Behauptung $f' = g$ folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. □

Anstelle von Funktionenfolgen kann man auch Reihen von Funktionen betrachten. Eine solche Reihe hat die Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

mit reell- oder komplexwertigen Funktionen $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$, die alle denselben Definitionsbereich D haben.

Die **gleichmäßige Konvergenz** einer solchen Funktionenreihe soll heißen, dass die Folge der Partialsummen gleichmäßig konvergiert. Damit kann man alle Konvergenzkriterien auf Funktionenreihen anwenden. Ein wichtiges Beispiel ist das folgende **Konvergenzkriterium von Weierstraß**:

Satz (1.11): *Seien $f_n : D \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ Funktionen. Es gelte $||f_n||_D \leq a_n$, und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiere. Dann konvergiert die Reihe $\sum_n f_n$ absolut und gleichmäßig auf D gegen eine Funktion $F : D \to \mathbb{C}$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\sum_n f_n$ punktweise gegen eine gewisse Funktion F konvergiert.

Für alle $x \in D$ gilt $|f_n(x)| \leq ||f_n||_D \leq a_n$. Nach dem Majorantenkriterium für gewöhnliche Reihen konvergiert daher $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ absolut. Für $x \in D$ setzen wir daher

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Damit ist die Grenzfunktion $F : D \to \mathbb{C}$ gegeben. Wir zeigen als nächstes, dass $F_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$ gleichmäßig gegen F konvergiert.

Für $\varepsilon > 0$ gibt es stets ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{m=N}^{\infty} a_m \leq \varepsilon$. Für $n \geq N$ folgt daraus für alle $x \in D$:

$$\left| \sum_{m=0}^{n} f_m(x) - F(x) \right| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} f_m(x) \right| \leq \sum_{m=N}^{\infty} |f_m(x)| \leq \sum_{m=N}^{\infty} a_m \leq \varepsilon,$$

und dies beendet den Beweis von Satz (1.11). □

Beispiel (1.12): Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, denn für $f_n(x) := \frac{\cos nx}{n^2}$ gilt: $||f_n||_{\mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}$, und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Als wichtige Anwendung der obigen Sätze betrachten wir **Potenzreihen**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten a_n.

Satz (1.13): *Konvergiert die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *für einen Wert* $x = y \neq 0$ *und ist* $0 < r < |y|$, *so konvergiert sowohl diese Reihe wie auch die durch gliedweises Differenzieren entstehende Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

in $\{x \in \mathbb{C} : |x| \leq r\}$ *absolut und gleichmäßig.*

Beweis: Ist $\sum_n a_n y^n$ für ein festes y eine konvergente Reihe, so sind die $a_n y^n$ nach dem Cauchy-Kriterium für konvergente Reihen beschränkt. Es gilt dann also $|a_n y^n| \leq c$ mit einer Konstanten c für beliebige $n \in \mathbb{N}$.

Für $|x| \leq r$ gilt dann $|a_n x^n| \leq |a_n y^n| \cdot \left|\frac{r}{y}\right|^n \leq c \cdot q^n$ mit $q = \left|\frac{r}{y}\right| < 1$. Ferner gilt $|n a_n x^{n-1}| \leq \frac{c}{|y|} n q^{n-1}$.

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert wegen $0 < q < 1$. Auch $\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1}$ ist eine konvergente Reihe, wie aus dem Quotientenkriterium leicht folgt. Die Anwendung des Majorantenkriteriums (1.11) liefert nun die Behauptung. □

(1.14) Satz und Definition: *Konvergiert die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *für mindestens ein* $x \neq 0$, *aber nicht für alle* x, *dann existiert eine positive Zahl* r *derart, dass die Potenzreihe für* $|x| < r$ *absolut konvergiert und für* $|x| > r$ *divergiert. Die Zahl*

$$r = \sup\left\{ |x| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert} \right\}$$

heißt der **Konvergenzradius** *der Potenzreihe.*

Bemerkungen:
(i) Über die Konvergenz der Potenzreihe $\sum_n a_n x^n$ mit $|x| = r$ lässt sich im Allgemeinen nichts aussagen.
(ii) Der Fall $r = 0$ besagt, dass $\sum_n a_n x^n$ nur für $x = 0$ konvergiert. Wir lassen aber auch die Möglichkeit $r = \infty$ zu, und diese besagt, dass $\sum_n a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{C}$ konvergiert.

Beweis von (1.14):
Aus der Konvergenz von $\sum_n a_n x^n$ für ein $x = y \neq 0$ folgt mit (1.13), dass unsere Reihe für $|x| < |y|$ stets konvergiert. Falls dagegen $\sum_n a_n x^n$ für $x = z$ divergiert, so folgt mit (1.13), dass für $|x| > |z|$ die Reihe stets divergiert. Der Wert $r := \sup\{|x| : \sum_n a_n x^n \text{ konvergiert}\}$ existiert also immer.

Für $|x| > r$ divergiert die Reihe, und für $|x| < r$ gibt es ein $y \in \mathbb{C}$ mit $|y| > |x|$, so dass $\sum_n a_n y^n$ konvergiert. Durch Anwendung von (1.13) folgt daraus die absolute Konvergenz von $\sum_n a_n x^n$, und wir sind fertig. □

Beispiele:

$$\text{(i)} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

$$\text{(ii)} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

$$\text{(iii)} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Alle diese Reihen sind divergent für $|x| > 1$, da in diesem Fall die Reihenglieder unbeschränkt wachsen (für $k \in \mathbb{Z},\ |a| < 1$ ist nämlich $\lim_{n\to\infty} n^k \cdot a^n = 0$). Für $|x| < 1$ hingegen sind die Reihen konvergent, wie man z.B. mit dem Quotientenkriterium leicht sieht.

Im Fall $|x| = 1$ hingegen zeigen unsere Reihen ein unterschiedliches Verhalten: Die Reihe (i) ist divergent, (ii) divergiert für $x = 1$ und konvergiert für $x = -1$. Die Reihe (iii) konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = 1$, denn mit $\sum_n \frac{1}{n^2}$ gibt es eine konvergente Majorante.

Wir behandeln nun die Differentiation und Integration von Potenzreihen.

Satz (1.15): *Jede Potenzreihe stellt in ihrem Konvergenzbereich $\{x : |x| < r\}$ eine stetige Funktion dar. Sie darf im Intervall $-r < x < r$ gliedweise differenziert und integriert werden.*

Beweis: Man verwende (1.6), (1.7) und (1.10). □

Beispiele:
(1) Für $|x| < 1$ betrachten wir $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Die gliedweise durchgeführte Integration liefert

$$-\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{für } |x| < 1.$$

Durch Übergang von x zu $-x$ ergibt sich

(1.16) $\quad \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$

(2) Für $|x| < 1$ betrachten wir $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$. Durch gliedweise Integration erhält man

(1.17) $\quad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

Beide Reihen konvergieren nach dem Leibnizkriterium auch für $x = 1$. Betrachten wir nun die Grenzwerte für $x \to 1-$, so vermuten wir

(1.18) $\quad \ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

und

(1.19) $\quad \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

Zum Beweis von (1.18) und (1.19) benötigt man den folgenden Satz:

Satz (1.20) (Abelscher Grenzwertsatz): *Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ reeller Zahlen, so konvergiert die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für alle $x \in [0,1]$ und stellt eine in $[0,1]$ stetige Funktion f dar. Insbesondere ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1-} f(x).$$

Beweis: Wir setzen

$$s_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \quad \text{für } n \geq -1.$$

Dann ist $s_{-1} = f(1)$ und $s_n - s_{n-1} = -a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter ist $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, und daher gibt es eine reelle Zahl $k \geq 0$ mit $|s_n| \leq k$ für alle n. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert daher die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ für alle x mit $|x| < 1$. Es gilt

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_{n-1} x^n + s_{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + f(1).$$

Daraus folgt

$$f(1) - f(x) = (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n,$$

und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|s_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wir setzen nun $\delta := \frac{\varepsilon}{2KN}$. Für $x \in [0,1) \cap (1-\delta, 1) = (1-\delta, 1)$ folgt

$$|f(1) - f(x)| \leq (1-x) \sum_{k=0}^{N-1} |s_n| \cdot x^n + (1-x) \sum_{n=N}^{\infty} |s_n| \cdot x^n \leq$$

$$\leq (1-x) \cdot K \cdot N + (1-x) \cdot \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Daraus folgt die Stetigkeit von f in 1, und dies beendet den Beweis von (1.20):

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = f(1).$$

$\square$

5.2 Die Taylorsche Formel und die Taylorreihe

Wir kennen aus dem letzten Abschnitt bereits Reihendarstellungen für die Funktionen $\frac{1}{1-x}$, $\log(1+x)$, $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ sowie $\arctan x$. In diesem Paragraphen wird systematisch untersucht, wann man Funktionen in Potenzreihen entwicken kann. Zunächst gilt:

(2.1) $I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein offenes Intervall, und die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal differenzierbar. Weiter gelte
(i) $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$ für ein $a \in I$;
(ii) $|f^{(n+1)}(x)| \leq K$ für alle $x \in I$.
Dann ist $|f(x)| \leq \frac{K}{(n+1)!} \cdot |x-a|^{n+1}$ für alle $x \in I$.

Wir führen den **Beweis** mit Induktion nach n. Für $n = 0$ folgt die Aussage

$$|f(x) - 0| = |f(x) - f(a)| \leq K|x-a|$$

direkt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Es bleibt der Induktionsschluss von $n-1$ nach n.
Zunächst erfüllt f' die Voraussetzungen mit $n-1$ anstelle von n. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt

$$|f'(x)| \leq \frac{K}{n!}|x-a|^n.$$

Daher ist $-\frac{K}{n!}|x-a|^n \leq f'(x) \leq \frac{K}{n!}|x-a|^n$. Die Ableitung

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \pm \frac{K}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}\right)$$

ist deshalb ≥ 0 für das positive Vorzeichen und ≤ 0 für das negative Vorzeichen. Der Ausdruck in der Klammer ist daher monoton wachsend bzw. fallend. Es folgt

$$|f(x)| \leq \frac{K}{(n+1)!}|x-a|^{n+1},$$

und dies beendet den Beweis von (2.1). $\square$

Für beliebige Funktionen f hat man im Allgemeinen keine Stelle a, bei der alle Ableitungen verschwinden. Daher versucht man, ein Polynom zu finden, das in a die gleichen Ableitungen wie f hat: Wir machen den Ansatz

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k.$$

Es ist dann $g^{(k)}(a) = k! \cdot c_k$, also setzen wir

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Mit dieser Wahl der c_k haben wir erreicht, dass für die Differenz $f - g$ alle Ableitungen in a bis zur Ordnung n verschwinden. Wir setzen nun $f - g =: R_n$ und haben damit

(2.2) $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$

mit einem Restglied $R_n(x)$. Es gilt

Satz (2.3) (Taylorsche Formel):

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $a \in I$ und $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

mit

(2.4) $\quad R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$

Gilt $|f^{(n+1)}(x)| \leq K$ für alle $x \in I$, so folgt

(2.5) $\quad |R_n(x)| \leq \frac{K}{(n+1)!}|x-a|^{n+1},$

die **Lagrangesche Abschätzung für das Restglied**.

Beweis: Zu (2.5) betrachten wir eine Funktion $g(x)$ wie oben.Es ist dann $f(x) - g(x) = R_n(x)$. Wendet man (2.1) auf $f(x) - g(x)$ an, so folgt (2.5).

Den Beweis von (2.4) führen wir mit Induktion:

Für $n = 0$ ist

$$R_0(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Nun der Induktionsschluss von $n-1$ nach n: Mittels partieller Integration hat man

$$R_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt =$$

$$= -\frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n)}(t)|_a^x + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt =$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

Damit ist Satz (2.3) bewiesen. $\square$

Korollar (2.6): Ist $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar mit $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in I$, dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Nun nehmen wir an, f sei unendlich oft differenzierbar. Falls dann das Restglied $R_n(x)$ für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert, so konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

gegen $f(x)$, und wir haben damit eine Potenzreihendarstellung der Funktion f gefunden.

Definition (2.7): *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und $a \in I$. Dann heißt*

$$T_f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die **Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt** *a.*

Bemerkungen:
(i) Der Konvergenzradius der Taylor-Reihe ist nicht notwendigerweise > 0.
(ii) Falls die Taylorreihe einer Funktion f konvergiert, so konvergiert sie nicht notwendig gegen f.
(iii) Die Taylorreihe konvergiert genau für diejenigen $x \in I$ gegen $f(x)$, für die das Restglied von Satz (2.3) gegen 0 konvergiert.

Hier ein Beispiel zu (ii) (**Cauchys Beispiel**): Sei

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Man zeigt per Induktion

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

mit explizit berechenbaren Polynomen P_n. Die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt 0 hat die Form $\sum_{\nu=0}^{\infty} 0 \cdot x^{\nu} \equiv 0$ und stellt daher die Funktion f **nicht** dar.

Wir betrachten nun Beispiele, in denen die Taylorreihe tatsächlich die Funktion darstellt:

Ist etwa $f(x) = e^x$, so gilt $f^{(n)}(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ergibt nach (2.5) die Restgliedabschätzung

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|},$$

die für jedes feste x für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert. Wir haben damit

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Analog erhält man die Potenzreihenentwicklungen für $\sin x$ und $\cos x$: Es ergibt sich

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

wegen $\sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ und $\sin^{(2n)}(0) = 0$ sowie $\cos^{(2n)}(0) = (-1)^n$ und $\cos^{(2n+1)}(0) = 0$.

Satz (2.8) (Logarithmenreihe): *Für* $-1 < x \leq 1$ *gilt*

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Zum Beweis wählen wir den Entwicklungspunkt $a = 0$ und die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ mit $x > -1$. Man erhält per Induktion

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Für das Restglied gilt

$$|R_n(x)| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1.$$

Den Fall $-1 < x \leq 0$ behandeln wir mittels des Restglieds in Integralform: Es ist

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt = -\int_0^{|x|} \left(\frac{|x| - t}{1-t} \right)^n \frac{dt}{1-t}$$

(wobei wir eine Substitution durchgeführt haben, nämlich $t \to \tau = -t$). Die Funktion

$$t \mapsto \frac{|x| - t}{1-t} = 1 - \frac{1-|x|}{1-t}$$

ist im Intervall $[0, |x|)$ monoton fallend, hat also ihr Maximum bei $t = 0$. Daraus folgt

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} \frac{|x|^n}{1-t} dt \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

(wegen $\frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-|x|}$). Das Restglied geht also für $-1 < x \leq 1$ stets gegen Null, und damit ist Satz (2.8) gezeigt. $\square$

Bemerkung: Die Reihe für $\log(1+x)$ konvergiert nur langsam, wenn $|x|$ nahe bei 1 liegt. Ist beispielsweise $\log 2$ zu berechnen, so geht man statt mit der Reihe aus (2.8) besser wie folgt vor:

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x) - \log(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) \quad \text{für } |x| < 1.$$

Der Wert $x = \frac{1}{3}$ liefert $\frac{1+x}{1-x} = 2$, und damit hat man die schneller konvergierende Reihe

$$\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \dots\right) = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \dots\right)$$

Für den Arcustangens sieht die Taylorentwicklung wie folgt aus:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{für } -1 < x \leq 1.$$

Es ist $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, also $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, und damit hat man:

Folgerung (2.9): Es ist

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Satz (2.10): *Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $|x| < 1$*

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

mit

$$\binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\cdots(a-(n-1))}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{a-k+1}{k}$$

und

$$\binom{a}{0} := 1.$$

Bemerkung: Für $a \in \mathbb{N}$ bricht die Reihe ab, da in diesem Fall $\binom{a}{n} = 0$ für $n > a$ gilt. Die Formel (2.10) ergibt dann den uns bereits bekannten binomischen Satz. Für $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ hingegen ist $\binom{a}{n} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis von (2.10): Es ist

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)\cdots(a-(n-1))(1+x)^{a-n} = n!\binom{a}{n}(1+x)^{a-n}$$

und daher

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)dt.$$

Wegen $f^{(n+1)}(t) = a(a-1)\cdots(a-(n+1-1))(1+x)^{a-n-1} =$
$= a \cdot \binom{a-1}{n} \cdot n! \cdot (1+x)^{a-n-1}$ folgt:

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k + \int_0^x a\binom{(a-1)}{n} \cdot (1+t)^{a-1-n} \cdot (x-t)^n \, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k + \int_0^x a\binom{(a-1)}{n}(1+t)^{a-1} \cdot \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \, dt.$$

Zur Abschätzung des Restglieds wird gezeigt, dass es für $|x| < 1$ gegen Null konvergiert für $n \to \infty$.

Dazu setzen wir $t = ux$ mit $0 \le u \le 1$. Es gilt

$$|1+t| = |1+ux| \ge 1 - |xu| \ge 1 - u$$

und daher

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| = |x| \cdot \left|\frac{1-u}{1+ux}\right| \le |x|.$$

Auf diese Weise ergibt sich

$$|R_n(x)| \le |a| \cdot |x|^n \cdot \left|\binom{(a-1)}{n}\right| \cdot \left|\int_0^x (1+t)^{a-1} dt\right| \le$$

$$\le c \cdot |x|^n \cdot \left|\binom{(a-1)}{n}\right|$$

mit einer von x und von u unabhängigen Konstanten c.

Für $c_n := |x|^n \cdot \left|\binom{a-1}{n}\right|$ gilt:

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = |x| \cdot \left|\frac{a-n}{n}\right|.$$

Für $n \to \infty$ ist $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n-1}} = |x|$. Ist also $|x| \le q < 1$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{c_n}{c_{n-1}} < q$ für alle $n \ge N$. Es ist dann $c_n \le \frac{c_N}{q^N} q^n$ für $n \ge N$. Da auf der rechten Seite dieser Ungleichung eine Nullfolge steht, erhalten wir damit $c_n \to 0$ für $n \to \infty$. Also gilt auch $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, und damit ist Satz (2.10) bewiesen. $\square$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die Reihe aus (2.10) für $|x| > 1$ divergiert. Für $x = +1$ oder $x = -1$ konvergiert sie für gewisse Werte von a.

Aus (2.10) folgt, wenn man $a = \frac{1}{2}$ und $-x^2$ anstelle von x setzt:

$$(2.11) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \binom{-1/2}{n} x^{2n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \ldots$$

Durch Integration folgt

$$(2.12) \qquad \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} =$$

$$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

5.3 Fourier-Reihen

Es gibt neben der bisher behandelten Taylor-Entwicklung einen weiteren sehr wichtigen Typ von Reihenentwicklungen einer Funktion. Dabei setzt man üblicherweise voraus, dass eine **periodische** Funktion vorliegt.

Man nennt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) **periodisch mit der Periode** $p > 0$, wenn $f(x + p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Bemerkung: Hat f die Periode p, so hat die Funktion $g(x) := f(px)$ die Periode 1. Wir können uns daher oBdA auf periodische Funktionen mit der Periode 1 beschränken. Beispiele solcher Funktionen sind

$$\sin 2\pi nx, \quad \cos 2\pi nx$$

für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$

Wir interessieren uns für folgende Frage: Ist f periodisch mit Periode 1, kann f dann stets in der Form

$$(3.1) \qquad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2\pi nx$$

entwickelt werden? Um diese Fragestellung zu vereinfachen, ist es meist zweckmäßig, statt des Sinus und Cosinus die komplexwertige Funktion $x \mapsto e^{ix}$ zu verwenden. Die Koeffizienten a_n und b_n gehen dann über in

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

für $n = 1, 2, \ldots$ Damit geht (3.1) formal über in

$$(3.2) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx} = f(x)$$

(wegen $c_n + c_{-n} = a_n$ und $ic_n - ic_{-n} = b_n$). Die Summe auf der linken Seite ist dann als $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi i n x}$ zu verstehen.

Wir nehmen an, die Reihe aus (3.2) konvergiere gleichmäßig in x gegen eine Funktion $f(x)$. Dann ist f als gleichmäßiger Limes einer Folge stetiger Funktionen stetig.

Für $m \in \mathbb{C}$ konvergiert auch

$$f(x) \cdot e^{-2\pi i m x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i (n-m)x}$$

gleichmäßig in x. Daraus folgt

(3.3) $\quad \int_a^{a+1} f(x) e^{-2\pi i m x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_a^{a+1} e^{2\pi i(n-m)x} dx = c_m$

(dabei ist $a \in \mathbb{R}$ beliebig, es kommt wegen der Periodizität nicht darauf an, welchen Wert man für a wählt).
Wir haben dabei benutzt

$$\int_a^{a+1} e^{2\pi i k x} dx = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k \neq 0, \end{cases}$$

wie man leicht mit Hilfe der Stammfunktion $x \mapsto \frac{1}{2\pi i k} \cdot e^{2\pi i k x}$ des Integranden nachrechnet.

Fazit: Falls f sich durch eine gleichmäßig konvergente Reihe aus (3.2) darstellen lässt, sind die Koeffizienten c_n durch (3.3) gegeben. Wir interessieren uns aber auch für den Fall, dass nur punktweise und keine gleichmäßige Konvergenz vorliegt. Die Frage ist, ob für eine gegebene Funktion f die Reihe (3.2) konvergiert und die Funktion darstellt.

Definition (3.4): *Ist f eine über $[a, a+1]$ integrierbare periodische Funktion mit Periode 1, so heißt*

$$c_n := \int_a^{a+1} f(x) e^{-2\pi i n x}\, dx \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

*der n-**te Fourierkoeffizient** von f. Die formal mit diesen Koeffizienten gebildete Reihe*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x}$$

*heißt die **Fourierreihe** von f.*

Hier einige Rechenregeln für Fourierkoeffizienten:

(3.5) Haben f und g die Fourierkoeffizienten a_n bzw. b_n, so gilt:
(i) $\alpha f(x) + \beta g(x)$ hat die Fourierkoeffizienten $\alpha a_n + \beta b_n$.
(ii) $h(x) := f(x - t)$ hat die Fourierkoeffizienten $a_n \cdot e^{-2\pi i n t}$.
(iii) Ist f stetig differenzierbar, so hat f' die Fourierkoeffizienten $2\pi i n a_n$.

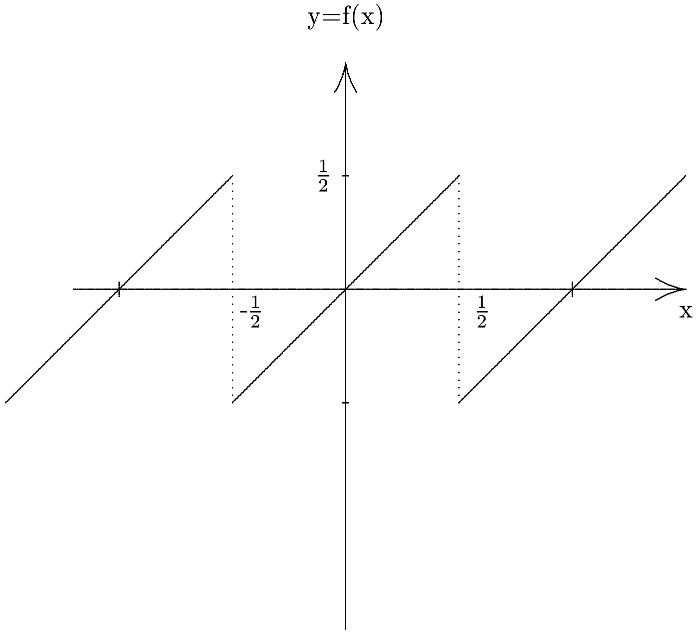

Abbildung 5.3: Für Funktionen dieser Gestalt (hier die periodisch fortgesetzte Funktion aus 3.6) lassen sich leicht mit (3.4) die Fourierkoeffizienten berechnen.

Beweis von (3.5): Die Aussage (i) ist klar, (ii) folgt aus der Substitutionsregel. Man sieht (iii) mittels partieller Integration wie folgt:

$$\int_a^{a+1} f'(x)e^{-2\pi inx}dx = f(x)e^{-2\pi inx}|_a^{a+1} + \int_a^{a+1} f(x)2\pi inxe^{-2\pi inx}dx =$$

$$= 2\pi in \cdot \int_a^{a+1} f(x)e^{-2\pi inx}dx = a_n \cdot 2\pi in.$$

□

Bemerkung: Die Eigenschaft (iii) besagt gerade, dass man die Fourierentwicklung von f gliedweise differenzieren kann, um daraus die Fourierentwicklung von f' zu erhalten.
Beispiele:

(3.6) Sei

$$f(x) := \begin{cases} x \text{ für } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 0 \text{ für } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Wir denken uns f periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt und erhalten damit die reellwertige Funktion von Bild 5.3.

Dann hat f folgende Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)e^0 dx = 0$$

und für $n \neq 0$

$$a_n = \int_{-1/2}^{1/2} x \cdot e^{-2\pi inx} dx = \left[-\frac{x}{2\pi in} e^{-2\pi inx}\right]_{-1/2}^{1/2} + \frac{1}{2\pi in} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi inx} dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi in} \cdot \frac{e^{-\pi in} + e^{\pi in}}{2} = -\frac{1}{2\pi in} \cdot \cos(\pi n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi in}.$$

Wir führen ab jetzt folgende Konvention ein: Das Symbol

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'$$

bezeichne eine unendliche Reihe, bei der das Glied für $n = 0$ ausgelassen wird. So ist etwa in unserem Fall

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi in} e^{2\pi inx},$$

wobei das (sinnlose) Glied mit $n = 0$ weggelassen wird. Wir haben nun eine Reihe, die zunächst in keinem Fall absolut konvergiert. Wir werden nun jedoch zeigen, dass punktweise Konvergenz vorliegt, wobei wieder $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ als $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N}$ verstanden wird.

Es ist

$$\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{2\pi inx} = \sum_{n=-N}^{N}{}' \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi in} e^{2\pi inx}$$

(wegen $\frac{1}{2\pi in} e^{2\pi inx} = \int_0^x e^{2\pi int} dt + \frac{1}{2\pi in}$)

$$= \int_0^x \sum_{n=-N}^{N}{}'(-1)^{n-1} e^{2\pi int} dt + \sum_{n=-N}^{N}{}' \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi in} = x - \int_0^x \sum_{n=-N}^{N} (-1)^n e^{2\pi int} dt.$$

Für $|t| < \frac{1}{2}$ gilt:

$$\sum_{n=-N}^{N} (-1)^n e^{2\pi int} = \sum_{n=0}^{2N} (-1)^{n-N} e^{2\pi i(n-N)t} =$$

$$= (-1)^N \cdot e^{-2\pi iNt} \cdot \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n \cdot e^{2\pi int} =$$

$$= (-1)^N \cdot e^{-2\pi i N t} \cdot \frac{1-(-e^{2\pi it})^{2N+1}}{1+e^{2\pi it}} =$$

$$= (-1)^N \cdot \frac{e^{-\pi i(2N+1)t} + e^{-\pi i(2N+1)t}}{e^{-\pi it}+e^{\pi it}} =$$

$$= (-1)^N \cdot \frac{\cos(\pi(2N+1)t)}{\cos \pi t}.$$

Ist $|x| \le a$ mit $a < \frac{1}{2}$ fest, so gilt

$$\left| x - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{2\pi i n x} \right| \le \left| \int_0^x \frac{\cos \pi(2N+1)t}{\cos \pi t} dt \right| \le$$

$$\le \left| \left[\frac{\sin(2N+1)\pi t}{(2N+1)\pi \cdot \cos \pi t} \right]_0^x - \frac{1}{(2N+1)\pi} \cdot \int_0^x \sin(2N+1)\pi t \cdot \frac{\pi \cdot \sin \pi t}{\cos^2 \pi t} dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{(2N+1) \quad \pi \cos \pi a} + \frac{1}{2N+1} \int_0^a \left| \frac{1}{\cos^2 \pi t} dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2N+1} \left(\frac{1}{\pi \cos \pi a} + \frac{a}{\cos^2 \pi a} \right).$$

Wir haben damit gezeigt, dass unsere Reihe für $|x| \le a$ gleichmäßig gegen x konvergiert.

Für $x = \frac{1}{2}$ nimmt die Reihe wegen

$$\sum_{n=-N}^{N}{}' \frac{1}{2\pi i n} = 0 \quad \text{für alle } N$$

den Wert Null an, und daraus folgt:

(3.7) $\quad \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N}{}' \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i n} \cdot e^{2\pi i n x} = f(x)$

gleichmäßig für alle x in jedem abgeschlossenen Intervall, das keine Sprungstellen von $f(x)$ enthält. Insbesondere gilt

$$x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N}{}' \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} \quad \text{für } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

Ist $|x| < \frac{1}{2}$, so liefert die gliedweise Integration zwischen den Grenzen 0 und x folgende Reihe:

$$\frac{x^2}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi i n)^2} (e^{2\pi i n x} - 1) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n}{(2\pi n)^2} e^{2\pi i n x} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi n)^2},$$

wobei der zweite Summand das konstante Glied c_0 ist. Die Fourierreihe konvergiert in diesem Fall **gleichmäßig und absolut** und stellt damit die Funktion dar, die aus

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{für } -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$$

durch periodische Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ entsteht. Dies gilt auch für $x = k + \frac{1}{2}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Wir wollen nun noch c_0 berechnen. Durch Einsetzen von $x = \frac{1}{2}$ entsteht

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n}{(2\pi n)^2} e^{\pi i n} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi n)^2},$$

und daraus folgt

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

und daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Daraus folgt die berühmte Summenformel

(3.8) $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$

und damit folgt in unserem Fall $c_0 = \frac{1}{24}$.

Bemerkung (3.9): Man kann zeigen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \ldots;$$

dies sind die Werte der Riemannschen Zetafunktion an den Stellen $x = 4,\ x = 6$. Die explizite Berechnung dieser Werte ist für alle $x = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ mittels der sogenannten **Bernoulli-Zahlen** möglich.

Schwerer tut man sich mit den Werten

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3},\ \zeta(5),\ \zeta(7), \ldots$$

Hier sind erst in jüngerer Zeit Ergebnisse erzielt worden, die aber weniger abschließend sind. **Apery** zeigte 1980, dass $\zeta(3)$ keine rationale Zahl ist.

Mit dem oben behandelten Beispiel lässt sich relativ einfach folgender Satz beweisen:

Satz (3.10): *Jede stetige, stückweise lineare Funktion mit der Periode 1 hat eine absolut und überall gleichmäßig konvergente Fourierreihe und wird durch diese dargestellt.* (Man vergleiche auch: Forster, Analysis 1, §23, Satz 3.)

Die Voraussetzungen des Satzes sind sehr einschränkend, andererseits kann man zeigen, dass es stetige Funktionen mit divergenter Fourierreihe gibt. Immerhin gilt aber der

Satz (3.11): *Konvergiert die Fourierreihe einer stetigen Funktion f gleichmäßig, so stellt sie die Funktion dar.*

Beweis: Seien c_n für $n \in \mathbb{Z}$ die Fourierkoeffizienten von f. Dann gilt

$$\int_a^{a+1} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx} \right) e^{-2\pi imx} dx = c_m = \int_a^{a+1} f(x) e^{-2\pi imx} dx.$$

Die Funktion $g(x) := f(x) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx}$ ist als gleichmäßiger Limes einer Folge stetiger Funktionen ebenfalls stetig. Wir nehmen an, für ein $y \in \mathbb{R}$ sei $g(y) \neq 0$. Dann gibt es ein $t > 0$, so dass auf $[y-t, y+t]$ die Funktion g bzw. $\operatorname{Re} g$ bzw. $\operatorname{Im} g$ ein festes Vorzeichen hat. Wir definieren nun

$$h(x) := \begin{cases} 0 \text{ für } a \leq x \leq y-t, \ y+t \leq x \leq a+1 \\ t^{-1}x - t^{-1}(y-t) \quad \text{für } y-t \leq x \leq y \\ -t^{-1}x + 1 + t^{-1}y \quad \text{für } y \leq x \leq y+t. \end{cases}$$

Diese Funktion h ist stetig und stückweise linear. Es gilt dann

$$\int_a^{a+1} g(x)h(x)dx \neq 0.$$

Andererseits folgt aus (3.10)

$$h(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=-N}^{N} b_m e^{2\pi imx}$$

mit den Fourierkoeffizienten b_m von h, und dieser Limes ist gleichmäßig. Mit

$$h_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} b_n e^{2\pi imx}$$

ist dann

$$\int_a^{a+1} g(x)h_N(x)dx =$$

$$= \int_a^{a+1} f(x) \sum_{m=-N}^{N} b_m e^{2\pi imx} - \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx} b_m e^{2\pi imx} dx =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} c_n b_n - \sum_{n=-N}^{N} c_n b_n = 0.$$

Also ist auch

$$\int_a^{a+1} g(x)h(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^{a+1} g(x)h_N(x)dx = 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir wollen abschließend noch kurz auf die Frage eingehen, welche stetigen Funktionen gleichmäßig konvergente Fourierreihen besitzen. Hierzu zunächst eine Vorbereitung:

(3.12) (Besselsche Ungleichung): *Hat f die Fourierkoeffizienten c_n, so gilt*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^{a+1} |f(x)|^2 dx.$$

Beweis: Es ist

$$0 \leq \int_a^{a+1} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi inx} \right|^2 dx =$$

$$= \int_a^{a+1} \left(f(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi inx} \right) \left(\overline{f(x)} - \sum_{m=-N}^{N} \overline{c_m} \cdot e^{-2\pi imx} \right) dx =$$

$$= \int_a^{a+1} f(x)\overline{f(x)}dx - \sum_{n=-N}^{N} c_n \cdot \int_a^{a+1} \overline{f(x)} e^{2\pi inx} dx -$$

$$- \sum_{m=-N}^{N} \overline{c_m} \int_a^{a+1} f(x) e^{-2\pi imx} dx + \sum_{m,n=-N}^{N} c_n \overline{c_m} \int_a^{a+1} e^{2\pi i(n-m)}\, dx =$$

$$= \int_a^{a+1} |f(x)|^2 dx - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2,$$

und daraus folgt die Konvergenz wie auch die behauptete Ungleichung. □

(Bemerkung: In Satz (3.12) gilt ohne zusätzliche Voraussetzungen sogar die Gleichheit, man spricht dann von der **Parsevalschen Gleichung**.)

Satz (3.13): *Jede stetig differenzierbare Funktion f mit der Periode 1 besitzt eine absolut und überall gleichmäßig konvergente Fourierreihe.*

Beweis: Seien c_n ($n \in \mathbb{Z}$) die Fourierkoeffizienten von f. Dann hat f' die Fourierkoeffizienten $2\pi inc_n$. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert dann

$$\sum_{n=-N}^{N}{}' \, |c_n| = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N}{}' \, \frac{1}{|n|} |2\pi inc_n| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\sum_{n=-N}^{N}{}' \frac{1}{n^2}} \cdot \sqrt{\sum_{n=-N}^{N}{}' |2\pi i n c_n|^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\int_a^{a+1} |f'(x)|^2 dx}$$

(wobei wir die Besselsche Ungleichung (3.12) verwenden). □

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlen und Funktionen **2**
- 1.1 Mengen und Abbildungen 2
- 1.2 Reelle Zahlen, ihre algebraischen Eigenschaften 5
- 1.3 Anordnung und geometrische Deutung der reellen Zahlen 11
- 1.4 Ungleichungen 17
- 1.5 Komplexe Zahlen 20
- 1.6 Funktionen 25

2 Grenzwerte und Stetigkeit **29**
- 2.1 Zahlenfolgen 29
- 2.2 Unendliche Reihen 37
- 2.3 Stetige Funktionen 45
- 2.4 Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenz 52
- 2.5 Exponentialfunktion im Komplexen und trigonometrische Funktionen 58

3 Differentialrechnung **66**
- 3.1 Die Ableitung 66
- 3.2 Der Mittelwertsatz 73
- 3.3 Untersuchung von Funktionen 77

4 Integralrechnung **85**
- 4.1 Das unbestimmte Integral 85
- 4.2 Das bestimmte Integral 95
- 4.3 Uneigentliche Integrale, Gammafunktion 108

5 Approximation von Funktionen **115**
- 5.1 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen 115
- 5.2 Die Taylorsche Formel und die Taylorreihe 125
- 5.3 Fourier-Reihen 131

Literatur

[1] O. Forster: Analysis I, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen: Vieweg Braunschweig, Neuauflage 1992

[2] H. Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1, 10. Auflage, Teubner Stuttgart 1993

[3] M. Kneser: Differential- und Integralrechnung I, Vorlesungsausarbeitung, Göttingen 1987

[4] K. Meyberg/P. Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung, Springer Verlag 1990

[5] J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis; Academic Press 1969, New York

Hinweise zum Literaturstudium:

Für die Nacharbeitung der Vorlesung: [1], [3].
Für weitere Stoffauswahl: [2], [5].
Für Hörer, die an naturwissenschaftlichen Anwendungen interessiert sind: [4].

Literaturergänzung:

K. Fritzsche: Grundkurs Analysis I , Differentiation und Integration in einer Veränderlichen,
2. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2008